

Современный  
Гуманитарный  
Университет

Дистанционное образование

---

0197.01.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество \_\_\_\_\_

Факультет \_\_\_\_\_

Номер контракта \_\_\_\_\_

## **РЯДЫ ФУРЬЕ**

ЮНИТА 1

Москва 2001

Разработано Е. Г. Ланиной,  
В. В. Подъяпольским, канд. физ.-мат. наук

Рекомендовано Министерством  
образования Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для  
студентов высших учебных заведений

## РЯДЫ ФУРЬЕ

Юнита 1. Ряды Фурье

### ЮНИТА 1

Курс посвящен рядам Фурье. Рассмотрены тригонометрические ряды Фурье, ряды Фурье по произвольным ортогональным системам, ряды Фурье по общим и классическим ортогональным полиномам, задача Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка и разложения функций в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Приводятся приложения и примеры.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 1

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН .....                                                                                                               | 5   |
| ЛИТЕРАТУРА .....                                                                                                                       | 6   |
| ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ .....                                                                                                                  | 7   |
| ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР .....                                                                                                               | 16  |
| Глава 1. Тригонометрические ряды Фурье. Интеграл Фурье .....                                                                           | 16  |
| § 1. Периодические функции. Тригонометрические ряды<br>периодических функций .....                                                     | 16  |
| § 2. Основная тригонометрическая система.<br>Тригонометрический ряд Фурье .....                                                        | 20  |
| § 3. Интеграл Дирихле .....                                                                                                            | 25  |
| § 4. Теорема Римана. Стремление коэффициентов<br>к нулю. Принцип локализации .....                                                     | 29  |
| § 5. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье .....                                                                              | 33  |
| § 6. Признаки Жордана и Дирихле сходимости рядов Фурье .....                                                                           | 40  |
| § 7. Ряды Фурье непериодических функций .....                                                                                          | 42  |
| § 8. Ряды Фурье периодических функций с произвольным<br>периодом .....                                                                 | 44  |
| § 9. Ряды Фурье четных и нечетных периодических<br>функций .....                                                                       | 45  |
| § 10. Комплексная форма ряда Фурье .....                                                                                               | 48  |
| § 11. Равномерная сходимость рядов Фурье .....                                                                                         | 50  |
| § 12. Явление Гиббса .....                                                                                                             | 51  |
| § 13. Операции над рядами Фурье. Полнота<br>тригонометрической системы .....                                                           | 56  |
| § 14. Равномерное приближение функций. Теоремы<br>Вейерштрасса .....                                                                   | 60  |
| § 15. Приближение функций в среднем. Экстремальное<br>свойство частных сумм тригонометрического ряда<br>Фурье. Формула Парсеваля ..... | 63  |
| § 16. Суммирование тригонометрических рядов Фурье ..                                                                                   | 72  |
| § 17. Кратные тригонометрические ряды .....                                                                                            | 89  |
| § 18. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье ..                                                                               | 95  |
| § 19. Сведения о несобственных интегралах, зависящих<br>от параметра .....                                                             | 98  |
| § 20. Доказательство интегральной формулы Фурье .....                                                                                  | 102 |
| § 21. Признаки сходимости интеграла Фурье .....                                                                                        | 104 |
| § 22. Различные виды интегральной формулы Фурье .....                                                                                  | 107 |
| § 23. Преобразование Фурье .....                                                                                                       | 112 |

|                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 2. Ряды Фурье по общим ортогональным полиномам                                                           | 118 |
| § 1. Весовая функция. Классы $\tilde{R}_{p(x)}([a, b])$ и $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$                         | 118 |
| § 2. Ортогональные системы                                                                                     | 121 |
| § 3. Ряды Фурье по ортогональным системам                                                                      | 125 |
| § 4. Линейная независимость. Процесс Грама-Шмидта построения ортогональных систем                              | 126 |
| § 5. Экстремальное свойство частных сумм ряда Фурье                                                            | 133 |
| § 6. Замкнутость и полнота ортогональных систем. Сходимость в среднем ряда Фурье                               | 135 |
| § 7. Ортогональные полиномы                                                                                    | 139 |
| § 8. Корни ортогональных полиномов. Рекуррентная формула                                                       | 145 |
| § 9. Ряды Фурье по ортогональным полиномам. Формула Кристоффеля-Дарбу. Сходимость ортогональных разложений     | 150 |
| Глава 3. Ряды Фурье по классическим ортогональным полиномам                                                    | 158 |
| § 1. Полиномы Чебышева первого рода                                                                            | 158 |
| § 2. Дальнейшие свойства полиномов Чебышева                                                                    | 162 |
| § 3. Ряды Фурье по полиномам Чебышева                                                                          | 166 |
| § 4. Полиномы Чебышева второго рода                                                                            | 171 |
| § 5. Полиномы Лежандра. Основные формулы и алгебраические свойства                                             | 183 |
| § 6. Интеграл Лапласа и оценки полиномов Лежандра                                                              | 191 |
| § 7. Ряды Фурье по полиномам Лежандра                                                                          | 193 |
| § 8. Полиномы Лагерра и Эрмита                                                                                 | 199 |
| § 9. Приложения теории ортогональных полиномов                                                                 | 202 |
| Глава 4. Ряды Фурье по собственным функциям дифференциального оператора второго порядка                        | 212 |
| § 1. Задача Штурма-Лиувилля для дифференциальных операторов второго порядка. Основные понятия                  | 212 |
| § 2. Разложения по собственным функциям регулярной задачи Штурма-Лиувилля. Полнота системы собственных функций | 216 |
| § 3. Сингулярная задача Штурма-Лиувилля. Частные случаи                                                        | 219 |
| § 4. Приложения                                                                                                | 240 |
| ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ                                                                             | 262 |
| ТРЕНИНГ УМЕНИЙ                                                                                                 | 290 |
| ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ                                                                                                | 334 |
| ГЛОССАРИЙ*                                                                                                     |     |

\* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.



## ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тригонометрические ряды Фурье. Интеграл Фурье. Элементарные факты о тригонометрических рядах Фурье периодических функций. Признаки сходимости. Полнота тригонометрической системы. Формула Парсеваля. Суммирование тригонометрических рядов Фурье. Способ средних арифметических. Теорема Фейера. Метод Пуассона-Абеля. Задача Дирихле. Кратные тригонометрические ряды. Интеграл Фурье. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. Свойства и вычисление интеграла Фурье. Преобразование Фурье.

Ряды Фурье по общим ортогональным полиномам. Ортогональные системы. Определение. Примеры. Ряды Фурье по ортогональным системам. Процесс Грама-Шмидта построения ортогональных систем. Экстремальное свойство частных сумм ряда Фурье. Полнота и замкнутость ортогональных систем. Сходимость в среднем рядов Фурье. Ортогональные полиномы. Определение. Ряды Фурье по ортогональным полиномам. Трехчленное рекуррентное соотношение. Сходимость рядов Фурье по ортогональным полиномам поточечно и в среднем.

Ряды Фурье по классическим ортогональным полиномам. Классические ортогональные полиномы и их свойства. Ряды Фурье по классическим ортогональным полиномам. Примеры.

Ряды Фурье по собственным функциям дифференциального оператора второго порядка. Задача Штурма-Лиувилля для регулярных и сингулярных дифференциальных операторов второго порядка. Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Приложения.

---

Примечание. Знаком (\*) отмечены работы, на основе которых составлен тематический обзор.

## **ЛИТЕРАТУРА\***

### **Базовая**

1. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.-Л., 1951 (стереотипное издание 1980 г.).
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М., 1966.

### **Дополнительная**

3. Никольский С. М. Курс математического анализа, Т.2. М., 1991.
4. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. М., 1989.
5. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.-Л., 1949.
6. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М., 1976.
7. Левитан Б. М.: Саргсян А. С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М., 1970.
8. Арефьев В. Н. Уравнения математической физики. Юнита 1. Метод разделения переменных в уравнениях с частными производными. М.: СГУ, 2000.
9. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
10. Демидович Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. М., 1977.
11. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Математический анализ в задачах и упражнениях (несобственные интегралы и ряды Фурье). М., 1998.

---

\* При написании тематического обзора были использованы все источники.

# ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

| № п/п | Умение                                                                                                                                                                               | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Разложить функцию, заданную в интервале $(-\pi, \pi)$ или $(-l, l)$ , в ряд Фурье и указать функцию, к которой будет сходиться полученный ряд на отрезке $[-\pi, \pi]$ или $[-l, l]$ | <p>1. Нарисовать график функции, продолжив ее периодически с периодом <math>2\pi</math> или <math>2l</math> на всю ось.</p> <p>2. Проверить условия достаточных признаков сходимости ряда Фурье (Дини-Липшица, Жордана, Дирихле).</p> <p>3. Выяснить четность или нечетность функции.</p> <p>4. Вычислить коэффициенты Фурье по формулам:</p> <p>а) если функция задана на <math>(-\pi, \pi)</math>, то</p> $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots);$ <p>б) если функция задана на <math>(-l, l)</math>, то</p> $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$ $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots);$ <p>с) если функция четная, то</p> $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = 0,$ $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = 0;$ <p>д) если функция нечетная, то</p> $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_n = 0.$ $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_n = 0.$ <p>5. Составить ряд Фурье функции <math>f(x)</math>.</p> |

| №<br>п/п | Умение                                                                                                                                                             | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                                                                                                    | <p>6. Указать функцию, к которой будет сходиться этот ряд, пользуясь поточечными признаками сходимости (см. п. 2): эта функция будет равна</p> <p>a) <math>f(x)</math> в точках интервала <math>(-\pi, \pi)</math> [или <math>(-l, l)</math>], где функция <math>f(x)</math> непрерывна;</p> <p>b) <math>\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}</math> в точках разрыва первого рода функции <math>f(x)</math>;</p> <p>c) <math>\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}</math> (или <math>\frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}</math>) на концах интервала.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 2.       | Разложить функцию, заданную в интервале $(0, \pi)$ или $(0, l)$ , в ряд по косинусам (по синусам) и с помощью этого разложения найти суммы заданных числовых рядов | <p>1. Продолжить функцию четным (нечетным) образом на <math>(-\pi, 0)</math> или <math>(-l, 0)</math>, а затем периодически с периодом <math>2\pi</math> или <math>2l</math> продолжить функцию на всю ось.</p> <p>2. Нарисовать график периодического продолжения.</p> <p>3. Проверить условия достаточных признаков сходимости ряда Фурье (Дини-Липшица, Жордана, Дирихле).</p> <p>4. Вычислить коэффициенты Фурье по формулам:</p> <p>a) если продолжение четное, то</p> $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad b_n = 0,$ $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad b_n = 0;$ <p>b) если продолжение нечетное, то</p> $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots), \quad a_n = 0,$ $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots), \quad a_n = 0.$ <p>5. Составить ряд Фурье функции <math>f(x)</math>.</p> |

| №<br>п/п | Умение                                                                                                                                                          | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                                                                                                 | <p>6. Указать функцию, к которой будет сходиться этот ряд, пользуясь поточечными признаками сходимости.</p> <p>7. Подставив значения <math>x</math>, указать сумму заданного числового ряда.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 3.       | <p>Написать равенство Парсеваля для функции, заданной на отрезке <math>[-\pi, \pi]</math>, и, исходя из этого равенства, найти сумму данного числового ряда</p> | <p>1. Установить, является ли данная функция функцией с интегрируемым квадратом на <math>[-\pi, \pi]</math>.</p> <p>2. Вычислить коэффициенты Фурье по формулам:</p> $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$ <p>(или их модификациям, если функция <math>f(x)</math> четная или нечетная).</p> <p>3. Вычислить интеграл <math>\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx</math>.</p> <p>4. Написать равенство Парсеваля:</p> $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$ <p>5. Произведя, если требуется, арифметические действия в правой и левой частях, получить сумму данного числового ряда.</p> |
| 4.       | <p>Найти интеграл Фурье данной функции <math>f(x)</math> и построить его график</p>                                                                             | <p>1. Построить график функции <math>f(x)</math>.</p> <p>2. Проверить выполнение условий достаточных признаков сходимости интеграла Фурье (Дини, Дирихле-Жордана или следствий из них).</p> <p>3. Выяснить четность или нечетность функции.</p> <p>4. Вычислить коэффициенты по формулам:</p> <p>а) в случае функции общего положения:</p> $a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin \lambda u du;$                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

| №<br>п/п | Умение                                                                                 | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.       | Найти интеграл Фурье данной функции $f(x)$ и построить его график                      | <p>b) в случае четной функции:</p> $a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^x f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = 0;$ <p>c) в случае нечетной функции:</p> $b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^x f(u) \sin \lambda u du, \quad a(\lambda) = 0.$ <p>5. Записать интеграл Фурье функции <math>f(x)</math>:</p> $f(x) \sim \int_0^x (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda.$ <p>6. Указать функцию, к которой будет сходиться интеграл Фурье, пользуясь поточечными признаками сходимости (см. п. 2): эта функция будет равна</p> <p>b) <math>f(x)</math> в точках прямой, где функция <math>f(x)</math> непрерывна;</p> <p>c) <math>\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}</math>, в точках разрыва первого рода функции <math>f(x)</math>;</p> <p>7. Построить график полученной функции.</p> |
| 5.       | Найти преобразование Фурье, косинус-, синус-преобразование Фурье данной функции $f(x)$ | <p>1. Проверить, будет ли заданная функция <math>f(x)</math> абсолютно интегрируемой на всей оси (в случае косинус- или синус-преобразования – на полупрямой <math>[0, +\infty)</math>).</p> <p>2. Вычислить преобразование Фурье по формуле:</p> <p>b) в общем случае:</p> $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x f(u) e^{i\lambda u} du;$ <p>c) косинус-преобразование:</p> $F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x f(u) \cos \lambda u du;$ <p>d) синус-преобразование:</p> $F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x f(u) \sin \lambda u du.$                                                                                                                                                                                                                                      |

| №<br>п/п | Умение                                                                                 | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                        | <p><u>Замечание.</u> Если в случае</p> <p>а) функция <math>f(x)</math> четная, то иногда удобно воспользоваться равенством</p> $F(\lambda) = F_c(\lambda),$ <p>б) если <math>f(x)</math> нечетная, то можно воспользоваться равенством</p> $F(\lambda) = iF_s(\lambda)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 6.       | Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ | <p>1. Проверить, выполнены ли для <math>f(x)</math> достаточные условия сходимости ряда Фурье-Чебышева в некоторой точке отрезка <math>[-1, 1]</math>:</p> <p>а) функция <math>f(x) \in \tilde{R}^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}([-1, 1])</math> и при фиксированном <math>x \in [-1, 1]</math> функция</p> $\frac{f(t) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}}{t-x} \in \tilde{R}^2_{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}([-1, 1])$ <p>или</p> <p>б) в окрестности данной точки <math>x \in [-1, 1]</math> функция должна удовлетворять условию Липшица порядка <math>\alpha = 1</math>.</p> <p>2. Сделав замену переменной <math>x = \cos \theta</math>, ввести вспомогательную функцию</p> $F(\theta) = f(\cos \theta)$ <p>и разложить ее в ряд Фурье по косинусам на <math>[0, \pi]</math></p> $F(\theta) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta,$ $\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ <p>3. Вернуться к переменной <math>x</math> и получить разложение <math>f(x)</math> в ряд Фурье по полиномам Чебышева</p> $T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ на } [-1, 1]:$ |

| №<br>п/п | Умение                                                                                              | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                                     | $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x),$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$ <p>причем</p> $a_n T_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \tau) \cos n\tau d\tau \times \cos n\theta = \alpha_n \cos n\theta,$ $n \geq 1,$ $a_0 T_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \tau) d\tau = \frac{\alpha_0}{2}.$ <p>4. Ряд Фурье по полиномам Чебышева сходится в точке <math>x</math> к сумме <math>\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}</math> (или к <math>f(x)</math>, если <math>x</math> – точка непрерывности функции).</p>                                                                                                                                                                                                                                      |
| 7.       | Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале $(-1,1)$ | <p>1. Проверить, выполнены ли для <math>f(x)</math> достаточные условия сходимости ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода в некоторой точке интервала <math>(-1,1)</math>:</p> <p>а) функция <math>f(x) \in \tilde{R}_{\sqrt{1-x^2}}^2([-1,1])</math> и при фиксированном <math>x \in (-1, 1)</math> функция</p> $f(t) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \frac{1}{t-x} \in \tilde{R}_{\sqrt{1-t^2}}^2([-1,1])$ <p>или</p> <p>б) в окрестности данной точки <math>x \in (-1,1)</math> функция должна удовлетворять условию Липшица порядка <math>\alpha = 1</math>.</p> <p>2. Сделав замену переменной <math>x = \cos \theta</math>, ввести вспомогательную функцию</p> $\Phi(\theta) = \sin \theta \cdot f(\cos \theta)$ <p>и разложить ее в ряд Фурье по синусам на <math>(0, \pi)</math>:</p> |



| №<br>п/п | Умение | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |        | $\Phi(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta,$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n=1, 2, \dots$ <p>3. Представить функцию <math>f(\cos \theta)</math> в виде ряда</p> $f(\cos \theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (0 < \theta < \pi)$ <p>4. Вернуться к переменной <math>x</math> и получить разложение <math>f(x)</math> в ряд по полиномам Чебышева второго рода</p> $U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{в интервале } (-1, 1):$ $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(x),$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) U_n(t) \sqrt{1-t^2} dt,$ $n=0, 1, 2, \dots,$ <p>причем</p> $a_n U_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \tau) \sin(n+1)\tau \sin \tau d\tau \times \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta} =$ $= b_{n+1} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n=0, 1, 2, \dots$ <p>5. Ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода сходится в точке <math>x</math> интервала <math>(-1, 1)</math> к сумме</p> $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (\text{или к } f(x), \text{ если } x - \text{точка непрерывности функции}).$ |

| №<br>п/п | Умение                                                                                 | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 8.       | Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале $(-1,1)$ | <p>1. Проверить, выполнены ли для <math>f(x)</math> достаточные условия сходимости ряда Фурье по полиномам Лежандра в некоторой точке интервала <math>(-1,1)</math>:</p> <p>а) функция <math>f(x) \in \tilde{R}^2([-1,1])</math> и при фиксированном <math>x \in (-1,1)</math> функция</p> $f(t) - \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2} \in \tilde{R}^2([-1,1])$ <p style="text-align: center;"><math>t - x</math></p> <p>или</p> <p>б) в некоторой окрестности точки <math>x</math> функция должна удовлетворять условию Липшица порядка <math>\alpha &gt; \frac{1}{2}</math>.</p> <p>2. Вычислить коэффициенты Фурье-Лежандра по формулам:</p> $a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt,$ <p>где</p> $P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$ <p><u>Замечание.</u> Для вычисления интеграла удобно пользоваться формулой</p> $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P_n(x)$ <p>и известными значениями полиномов Лежандра:</p> $P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n,$ $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, P_{2n+1}(0) = 0.$ <p>3. Составить ряд Фурье-Лежандра функции <math>f(x)</math>:</p> $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x).$ |

| №<br>п/п | Умение                                                                                                                                      | Алгоритмы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                                                                             | <p>4. Ряд Фурье-Лежандра сходится в точке <math>x</math> интервала <math>(-1,1)</math> к сумме <math>\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}</math> (или к <math>f(x)</math>, если <math>x</math> – точка непрерывности функции).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 9.       | <p>Разложить данную функцию <math>f(x)</math> в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля в интервале <math>(a,b)</math></p> | <p>1. Решить задачу Штурма-Лиувилля.</p> <p>2. Проверить достаточные условия поточечной сходимости в интервале <math>(a,b)</math> ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля:<br/> а) кусочная непрерывность функции на <math>[a,b]</math>;<br/> б) кусочная непрерывность ее производных до второго порядка.</p> <p>3. Вычислить коэффициенты Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля <math>\{y(x, \lambda_n)\}</math>:</p> $c_n = \frac{1}{\ y(x, \lambda_n)\ ^2} \int_a^b f(x) y(x, \lambda_n) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ <p>4. Составить ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля:</p> $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n y(x, \lambda_n).$ <p>5. Ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля сходится для <math>a &lt; x &lt; b</math> к сумме <math>f(x)</math> в каждой точке непрерывности и к сумме <math>\frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}</math> в каждой точке разрыва.</p> |

## ГЛАВА 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

### § 1. Периодические функции. Тригонометрические ряды периодических функций

Функция  $f(x)$ , заданная для всех значений  $x$ , называется **периодической**, если существует число  $T \neq 0$ , для которого

$$f(x+T) = f(x),$$

каково бы ни было  $x$ . Минимальное число  $T$  с таким свойством называется **периодом** функции  $f(x)$ .

Сумма, разность, произведение и частное функций периода  $T$ , очевидно, являются функциями того же периода.

Если  $T$  есть период функции  $f(x)$ , то и все числа вида  $kT$ , где  $k$  – целое число, будут также периодами. В дальнейшем будем предполагать  $T > 0$ .

Отметим следующее свойство функций периода  $T$ .

**Лемма 1.1.** Если функция  $f(x)$  периода  $T$  интегрируема на некотором отрезке длины  $T$ , то она интегрируема на всяком другом отрезке той же длины, причем

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx \quad (1.1)$$

для любых действительных чисел  $a$  и  $b$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать равенство (1.1) для  $b = 0$ . Существует единственное целое число  $k$  такое, что  $kT \leq a < (k+1)T$  и, очевидно,

---

\* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

$$\int_a^{(k+1)T} f(x)dx = \int_a^{(k+1)T} f(x - kT)dx = \int_{a-kT}^T f(z)dz,$$

$$\int_{(k+1)T}^{a+T} f(x)dx = \int_{(k+1)T}^{a+T} f(x - (k+1)T)dx = \int_0^{a-kT} f(z)dz.$$

Складывая эти равенства, получим (1.1) (при  $b = 0$ ). □

Часто в случае функций периода  $T$  приходится употреблять равенство

$$\int_0^T f(t-x)dt = \int_0^T f(t)dt,$$

где  $x$  может быть любым значением. Действительно, в силу (1.1) имеем

$$\int_0^T f(t-x)dt = \int_{-x}^{T-x} f(z)dz = \int_0^T f(t)dt.$$

Наиболее известными периодическими функциями являются  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ . Другой пример периодической функции, важный для приложений, дает функция

$$y = A \sin(\omega x + \varphi),$$

где  $A, \omega, \varphi$  – постоянные. Эта функция называется **гармоникой**, или синусоидальной функцией. Она задает отклонение точки от положения равновесия при гармоническом колебании. Число  $|A|$  называется амплитудой,  $\omega$  – частотой, а  $\varphi$  – начальной фазой колебания. Гармоника

имеет период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Воспользовавшись известной тригонометрической формулой, можем написать:

$$A \sin(\omega x + \varphi) = A(\cos \omega x \sin \varphi + \sin \omega x \cos \varphi).$$

Положив

$$a = A \sin \varphi, \quad b = A \cos \varphi, \quad (1.2)$$

убедимся, что всякую гармонику можно представить в виде

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x. \quad (1.3)$$

Справедливо и обратное: всякая функция вида (1.3) есть гармоника. Действительно, из уравнений (1.2) найдем:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

откуда

$$\begin{aligned} a \cos \omega x + b \sin \omega x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega x \right) = \\ &= A(\sin \varphi \cos \omega x + \cos \varphi \sin \omega x) = A \sin(\omega x + \varphi). \end{aligned}$$

Положим  $T = 2l$ . Тогда в силу равенства  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  получим:  $\omega = \frac{\pi}{l}$ .

Следовательно, гармоника с периодом  $T = 2l$  имеет вид:

$$a \cos \frac{\pi x}{l} + b \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Рассмотрим гармоники

$$a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

с частотами  $\omega_k = \frac{\pi k}{l}$  и периодами  $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2l}{k}$ . Число  $T = 2l$  является периодом для всех гармоник (1.4), поэтому всякая сумма вида

$$s_n(x) = A + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right),$$

где  $A = \text{const}$ , есть функция периода  $2l$ , которую будем называть **тригонометрическим многочленом порядка  $n$**  (периода  $2l$ ):

Сумма бесконечного **тригонометрического ряда**

$$A + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi kx}{l} + b_k \sin \frac{\pi kx}{l} \right)$$

(если он сходится) также представляет собой функцию периода  $2l$ . Природа функций, являющихся суммами таких тригонометрических рядов, очень разнообразна. Поэтому возникает вопрос: нельзя ли всякую заданную функцию периода  $T = 2l$  представить в виде суммы тригонометрического ряда?

Для широкого класса функций такая задача решается положительно.

Если

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi kx}{l} + b_k \sin \frac{\pi kx}{l} \right), \quad (1.5)$$

то, положив  $\frac{\pi x}{l} = t$ , найдем для  $\varphi(t) = f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$

$$\varphi(t) = A + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (1.6)$$

Гармоники этого ряда имеют общий период  $2\pi$ . Таким образом, если для  $f(x)$  периода  $2l$  имеет место разложение (1.5), то для функции  $\varphi(t) = f\left(\frac{tl}{\pi}\right)$  периода  $2\pi$  имеет место разложение (1.6). Справедливо и обратное. Поэтому достаточно уметь решать задачу разложения в тригонометрический ряд для функций периода  $2\pi$ .

## § 2. Основная тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье

**Основной тригонометрической системой** будем называть систему функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (2.1)$$

Все эти функции имеют общий период  $2\pi$  (хотя  $\cos nx$  и  $\sin nx$  имеют меньший период  $\frac{2\pi}{n}$ ).

**Лемма 2.1.** Функции основной тригонометрической системы (2.1) обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx &= 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** Достаточно доказать первое и последнее соотношения (2.2). Остальные доказываются аналогично. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] dx = \\ &= \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n \neq m; \end{aligned}$$



$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi + \frac{\sin 2nx}{4n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \quad n = 1, 2, \dots \square$$

**Определение.** Две функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  **ортогональны** на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

В силу леммы 2.1 функции системы (2.1) ортогональны на  $[-\pi, \pi]$ .

А в силу периодичности – на любом отрезке  $[a, a + 2\pi]$ .

Пусть для функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  имеет место разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (2.3)$$

Сразу же возникает вопрос, как найти коэффициенты  $a_0$ ,  $a_n$  и  $b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , зная функцию  $f(x)$ . Ответ легко получить, когда ряд в правой части равенства (2.3) сходится равномерно на всей числовой оси.

**Теорема 2.2.** Если тригонометрический ряд в правой части равенства (2.3) равномерно сходится на всей числовой оси, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Доказательство.** Поскольку ряд в правой части равенства (2.3) сходится равномерно, то его можно почленно интегрировать на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Поэтому, проинтегрировав обе части равенства (2.3), будем иметь

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \pi a_0,\end{aligned}$$

откуда следует первая формула (2.4).

Если обе части равенства (2.3) умножить на  $\cos mx$  или  $\sin mx$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , то, поскольку эти функции ограничены на числовой оси, в правой части будут стоять равномерно сходящиеся на всей числовой оси ряды. Проинтегрировав обе части каждого из получившихся равенств и воспользовавшись формулами (2.2), будем иметь (например, в случае  $\cos mx$ ):

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \right) dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right) = \pi a_m.\end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \square$$

Замечание 1. Напомним, что функция  $f(x)$  называется абсолютно интегрируемой на отрезке  $[a, b]$  в римановом, вообще говоря, несобственном смысле, если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  имеет конечное число осо-

бенностей, а  $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ .

Замечание 2. Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то из неравенств  $|f(x)\cos nx| \leq |f(x)|$ ,  $|f(x)\sin nx| \leq |f(x)|$  следует, что функции  $f(x)\cos nx$ ,  $f(x)\sin nx$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , также абсолютно интегрируемы. Таким образом, формулы (2.4) имеют смысл для любой абсолютно интегрируемой на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции.

**Определение.** Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$ , вычисленные по формулам (2.4), называются **коэффициентами Фурье** для функции  $f(x)$ , а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется ее **рядом Фурье**<sup>1</sup>.

Пусть задана некоторая интегрируемая функция периода  $2\pi$ , и мы хотим представить ее в виде суммы тригонометрического ряда. Из предыдущих рассуждений легко вытекает следующая

**Теорема 2.3.** Если для функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  имеет место разложение в некоторый равномерно сходящийся на  $[-\pi, \pi]$  тригонометрический ряд, то этот ряд является рядом Фурье для  $f(x)$ .

Действительно, пусть для  $f(x)$  имеет место равенство (2.3), где ряд справа сходится равномерно. Тогда сумма равномерно сходящегося ряда функция  $f(x)$  непрерывна и возможно почленное интегрирование ряда. Это дает нам первое соотношение (2.4).

Рассмотрим равенство

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx) \quad (2.5)$$

и покажем, что ряд справа сходится равномерно.

<sup>1</sup> Ж.Б. Фурье (1768-1830) – французский математик. Ему принадлежат фундаментальные исследования, относящиеся к представлению функций тригонометрическими рядами.

Положим

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Пусть  $\varepsilon$  – произвольное положительное число. Если ряд (2.3) сходится равномерно, то существует число  $N$  такое, что для всех  $m \geq N$

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Произведение  $S_n(x) \cos mx$ , очевидно, является  $n$ -й частной суммой ряда (2.5). Поэтому из соотношения

$$|f(x) \cos mx - S_n(x) \cos mx| = |f(x) - S_n(x)| |\cos mx| \leq \varepsilon,$$

справедливого для всех  $m \geq N$ , вытекает равномерная сходимость ряда (2.5).

Таким образом, этот ряд можно почленно интегрировать, а интегрирование дает второе равенство (2.4). Аналогично доказывается третье равенство (2.4). Следовательно, ряд (2.3) есть ряд Фурье для  $f(x)$ .

Замечание 3. Если о равномерной сходимости ряда ничего наперед не предполагается, наши соображения не доказывают того, что функция может разлагаться в ряд Фурье. В этом случае мы имеем право лишь формально рассматривать ряд Фурье данной функции  $f(x)$  и можем утверждать только то, что он “соответствует” данной функции  $f(x)$ . Эту связь обычно обозначают так:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Знак “ $\sim$ ” можно заменить знаком “ $=$ ” только тогда, когда нам удастся доказать сходимость ряда и равенство его суммы функции  $f(x)$ .

### §3. Интеграл Дирихле

Пусть функция  $f(x)$  имеет период  $2\pi$  и абсолютно интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$  (или, как будем говорить, абсолютно интегрируема на периоде) и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (3.1)$$

Частную сумму порядка  $n$  ряда Фурье (3.1) будем обозначать  $S_n(x; f)$ , или короче  $S_n(x)$ :

$$S_n(x) = S_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Найдем для этой суммы выражение, удобное для ее дальнейшего изучения.

Подставим в  $S_n(x)$  вместо  $a_n$  и  $b_n$  их интегральные выражения (2.4), получим

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left( \frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt + \frac{\sin kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right] f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] f(t) dt. \end{aligned}$$

Функция

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

называется **ядром Дирихле**<sup>1</sup> порядка  $n$ .

Таким образом,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt. \quad (3.3)$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется **интегралом Дирихле**.

**Лемма 3.1.** Ядро Дирихле  $D_n(t)$

1) является четной непрерывной периода  $2\pi$  функцией;

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 1;$$

$$3) D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}, & t \neq 2\pi m, \\ \frac{1}{\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right), & t = 2\pi m, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Доказательство.** Свойство 1) очевидным образом следует из определения (3.2) ядра Дирихле. Формула  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$  получается из

(3.2) интегрированием обеих частей этого равенства по отрезку  $[-\pi, \pi]$ ,

а формула  $2 \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 1$  получается из предыдущей в силу четности ядра Дирихле. Докажем свойство 3).

Если  $t = 2\pi m$ , то равенство тривиально, ибо  $\cos 2\pi mk = 1$ . Если же  $t \neq 2\pi m$ , то, очевидно,

<sup>1</sup> Л. Дирихле (1805-1859) – немецкий математик. В 1829 году он впервые доказал сходимость ряда Фурье для кусочно-монотонных непрерывных функций.

$$2\pi D_n(t) \sin \frac{t}{2} = \sin \frac{t}{2} + 2 \cos t \sin \frac{t}{2} + 2 \cos 2t \sin \frac{t}{2} + \dots + 2 \cos nt \sin \frac{t}{2}.$$

Применяя к каждому слагаемому в правой части формулу

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta),$$

найдем:

$$\begin{aligned} 2\pi D_n(t) \sin \frac{t}{2} &= \sin \frac{t}{2} + \left( \sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{t}{2} \right) + \left( \sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t \right) + \dots \\ &\dots + \left( \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) t \right) = \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D_n(t) = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}. \square$$

Замечание 1. Так как  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{2\pi \sin \frac{t}{2}} = n + \frac{1}{2}$ , то при  $t \in [0, \pi]$  мож.

но считать, что  $D_n(t) = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}$ . Это будет удобным для дальней-

ших рассуждений.

Докажем также следующее предложение.

**Лемма 3.2.** Если функция  $f(x)$  имеет период  $2\pi$  и абсолютно интегрируема на периоде, то

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt \quad (3.4)$$

и

$$S_n(x) = \int_0^{\pi} D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \quad (3.5)$$

*Доказательство.* Докажем формулу (3.4). В силу (3.3) имеем:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt$$

Делая в последнем интеграле замену переменной  $u = t - x$ , получим:

$$S_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u) du,$$

откуда, воспользовавшись  $2\pi$ -периодичностью функций  $f(x)$  и  $D_n(t)$ , окончательно получим:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u) du.$$

Для доказательства формулы (3.5) разобьем в формуле (3.4) промежуток интегрирования на отрезки  $[-\pi, 0]$  и  $[0, \pi]$ , а затем сделаем в первом интеграле замену переменной  $t = -u$ :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt = \int_{-\pi}^0 D_n(t) f(x+t) dt + \int_0^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} D_n(-u) f(x-u) du + \int_0^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt = \int_0^{\pi} D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \end{aligned}$$

(При переходе к последнему равенству мы воспользовались четностью функции  $D_n(t)$ .)  $\square$



## § 4. Теорема Римана. Стремление коэффициентов к нулю. Принцип локализации

Займемся теперь изучением поведения частных сумм ряда Фурье. Для начала докажем следующее утверждение, принадлежащее Б. Риману<sup>1</sup>.

**Теорема 4.1.** (Риман) Если функция  $g(t)$  абсолютно интегрируема на некотором конечном отрезке  $[a, b]$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin p t dt = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos p t dt = 0.$$

Замечание 1. Напомним, что если некоторое числовое множество  $X$  ограничено сверху, то наименьшее среди всех чисел, ограничивающих его сверху, называется его точной верхней гранью и обозначается  $\sup_{x \in X} x$ . Если числовое множество  $X$  ограничено снизу, то наибольшее среди всех чисел, ограничивающих его снизу, называется его точной нижней гранью и обозначается  $\inf_{x \in X} x$ .

Замечание 2. Точная верхняя грань всевозможных разностей значений функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , называется колебанием  $\omega(f, [a, b])$  функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{x', x'' \in [a, b]} [f(x') - f(x'')].$$

Доказательство теоремы 4.1 достаточно провести для первого из этих соотношений. Заметим, что каков бы ни был конечный отрезок  $[\alpha, \beta]$ , будем иметь оценку:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \sin p t dt \right| = \left| \frac{\cos p \alpha - \cos p \beta}{p} \right| \leq \frac{2}{p}. \quad (4.1)$$

<sup>1</sup> Б.Ф. Риман (1826-1866) — немецкий математик, внес большой вклад в интегральное исчисление и теорию аналитических функций.

Допустим сначала, что функция  $g(t)$  интегрируема в собственном смысле. Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  частей точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b \quad (4.2)$$

и в соответствии с этим разложим интеграл

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin ptdt.$$

Обозначив через  $m_i$  точную нижнюю грань значений  $g(t)$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ , преобразуем это выражение так:

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin ptdt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin ptdt.$$

Если  $\omega_i$  – колебание функции  $g(t)$  на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$ , то на этом отрезке  $g(t) - m_i \leq \omega_i$ . Отсюда, принимая во внимание неравенство (4.1), легко получить оценку для нашего интеграла:

$$\left| \int_a^b g(t) \sin ptdt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i + \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

Зададимся произвольным числом  $\varepsilon > 0$  и выберем разбиение (4.2) так, чтобы

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2};$$

это возможно сделать ввиду интегрируемости функции  $g(t)$ . Теперь, так как числа  $m_i$  тем самым уже определены, можем взять

$$p > \frac{4}{\varepsilon} \sum m_i$$

и для этих значений  $p$  получим

$$\left| \int_a^b g(t) \sin ptdt \right| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

В случае если функция  $g(t)$  абсолютно(!) интегрируема в несобственном смысле, достаточно ограничиться предположением, что на отрезке  $[a, b]$  имеется лишь одна особая точка, например точка  $b$ . Иначе можно разложить отрезок на конечное число частей, содержащих лишь по одной особой точке, и применить рассуждение к каждой части в отдельности.

Пусть  $0 < \eta < b - a$ . Разлагая интеграл на два:

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt = \int_a^{b-\eta} + \int_{b-\eta}^b,$$

для второго интеграла справа имеем при любом  $p$  оценку:

$$\left| \int_{b-\eta}^b g(t) \sin ptdt \right| \leq \int_{b-\eta}^b |g(t)| dt,$$

что меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$ , если выбрать  $\eta$  достаточно малым. А интеграл

$$\int_a^{b-\eta} g(t) \sin ptdt$$

при  $p \rightarrow \infty$  стремится к нулю – по уже доказанному, так как на отрезке  $[a, b - \eta]$  функция  $g(t)$  интегрируема в собственном смысле. Поэтому при достаточно большом  $p$

$$\left| \int_a^{b-\eta} g(t) \sin ptdt \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Вспомнив формулы (2.4), выражающие коэффициенты Фурье, в качестве непосредственного следствия из теоремы 4.1 получим утверждение:

Коэффициенты Фурье  $a_n$ ,  $b_n$  абсолютно интегрируемой функции при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю.

Вторым следствием доказанной теоремы является так называемый **принцип локализации**.

Зафиксируем точку  $x = x_0$ . Возьмем произвольное число  $\delta$ ,  $0 < \delta < \pi$ , и разобьем интеграл (3.5) на два – по отрезкам  $[0, \delta]$  и  $[\delta, \pi]$ . Принимая во внимание формулу 3) (лемма 3.1) для ядра Дирихле, получим в точке  $x_0$ :

$$S_n(x_0) = \int_0^{\delta} D_n(t) [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] dt + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Так как функция  $\frac{1}{\sin \frac{t}{2}}$  непрерывна и ограничена на отрезке  $[\delta, \pi]$ ,

а функции  $f(x_0 + t)$  и  $f(x_0 - t)$  как функции переменной  $t$  абсолютно интегрируемы на этом отрезке, то и функция  $\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{\sin \frac{t}{2}}$  аб-

солютно интегрируема на отрезке  $[\delta, \pi]$ . Следовательно, согласно теореме 4.1 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0.$$

Таким образом, имеет место асимптотическое равенство:

$$S_n(x_0) = \int_0^{\delta} D_n(t) [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] dt + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Но в подынтегральное выражение интеграла (4.3) входят лишь значения функции  $f(x)$ , отвечающие изменению аргумента на отрезке  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Поэтому справедлива

**Теорема 4.2** (принцип локализации, Риман). Если  $f(x)$  —  $2\pi$ -периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция, то существование предела последовательности ее частных сумм Фурье  $S_n(x_0)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в некоторой точке  $x_0 \in \mathbf{R}$  равносильно существованию предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} D_n(t) [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] dt,$$

где  $\delta$ ,  $0 < \delta < \pi$ , — произвольное число. При этом если указанные пределы существуют, то они равны.

Таким образом, несмотря на то, что коэффициенты Фурье функции определяются с помощью ее значений на всем периоде, поведение ее ряда Фурье в некоторой точке  $x_0$  зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки  $x_0$ .

## § 5. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье

Продолжим изучение поведения частных сумм ряда Фурье в зависимости от поведения функции в окрестности данной точки  $x_0$ . В § 3 мы получили интегральное выражение (3.5) для частной суммы ряда Фурье  $S_n(x; f)$  функции  $f(x)$ , удовлетворяющей поставленным выше условиям. В частности, взяв  $f(x) \equiv 1$ , получим, что  $S_n(x; f) \equiv 1$ , а, сле-

довательно, в силу равенства (3.5) и замечания 1 (§ 3) будем иметь:

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

Умножая обе части этого равенства на постоянное число  $S_0$  – предполагаемую сумму нашего ряда в точке  $x_0$ , и вычитая результат из (3.5) при  $x = x_0$ , найдем:

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt, \quad (5.1)$$

где

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0.$$

Очевидно, что если функция  $f(x)$  периодическая и абсолютно интегрируемая на периоде, то при любом фиксированном  $x = x_0$  функция  $\varphi(t)$  также будет периодической с тем же периодом и абсолютно интегрируемой на периоде.

Если мы хотим установить, что  $S_0$  действительно является суммой ряда, то нужно доказать, что интеграл (5.1) при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Уточним теперь значение числа  $S_0$ .

Замечание 1. Напомним, что левым (правым) пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется величина

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0) \quad \left( \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0) \right)$$

(если эти пределы существуют и конечны).

Если  $x_0$  – точка непрерывности  $f(x)$ , эти пределы существуют, причем

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0).$$

Точка  $x_0$  есть точка разрыва первого рода для функции  $f(x)$ , если оба предела существуют (но могут быть различны). Величина  $\kappa = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  называется скачком функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

Нас будут интересовать два случая: а)  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и б)  $f(x)$  имеет в этой точке разве лишь разрыв первого рода. В этих случаях положим:

в случае а):  $S_0 = f(x_0)$ ;

в случае б):  $S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ .

Заметим, что так как

$$\text{а) } \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 \pm t) = f(x_0) \text{ или б) } \lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 \pm t) = f(x_0 \pm 0);$$

$t > 0$   $t > 0$

то при указанном выборе числа  $S_0$  всегда будет

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0.$$

$t > 0$

Сформулируем теперь

**Признак Дини**<sup>1</sup>. Ряд Фурье функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  сходится к сумме  $S_0$ , если при некотором  $h > 0$  существует интеграл

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt. \quad (5.2)$$

<sup>1</sup> У. Дини (1845-1918) – итальянский математик.

**Доказательство.** Если указанный интеграл существует, то существует и интеграл

$$\int_0^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt.$$

Перепишем выражение (5.1) в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Тогда в силу теоремы 4.1 оно стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , так как

функция  $\frac{\varphi(t)}{t}$ , а значит, и  $\frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}$  абсолютно интегрируема, что и

завершает доказательство теоремы.  $\square$

Интеграл (5.2) называется **интегралом Дини**. Перепишав его в развернутом виде:

в случае а): 
$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)|}{t} dt,$$

в случае б): 
$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)|}{t} dt,$$

увидим, что достаточно предположить существование порознь интегралов:

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0)|}{t} dt \quad \text{и} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t) - f(x_0)|}{t} dt \quad (5.3)$$

или

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t} dt \quad \text{и} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-0)|}{t} dt$$



в случаях а) или б) соответственно.

Отсюда можно получить ряд частных признаков. Например, ограничиваясь случаем а), укажем

**Признак Липшица**<sup>2</sup>. Ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в точке  $x_0$ , где она непрерывна, к сумме  $f(x_0)$ , если для достаточно малых  $t$  выполняется неравенство

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Lt^\alpha, \quad (5.4)$$

называемое **условием Липшица порядка  $\alpha$** , где  $L$  и  $\alpha$  – положительные постоянные ( $\alpha \leq 1$ ).

Действительно, в случае  $\alpha = 1$  имеем:

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leq L,$$

и, следовательно, интегралы (5.3) существуют в собственном смысле. Если же  $\alpha < 1$ , то

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leq \frac{L}{t^{1-\alpha}},$$

и интегралы (5.3) существуют, хотя бы как несобственные.

В частности, условие Липшица при  $\alpha = 1$  заведомо будет выполнено, если для функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  существует конечная производная  $f'(x_0)$  или, по крайней мере, конечные односторонние производные

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t},$$

хотя бы и различные между собой.

Таким образом, в точке  $x_0$ , где функция  $f(x)$  дифференцируема или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производ-

<sup>2</sup> Р. Липшиц (1832-1903) – немецкий математик.

ные, ее ряд Фурье сходится к сумме  $f(x_0)$ .

Легко переформулировать признак Липшица для случая б). В качестве следствия отсюда получим, что в точке  $x_0$  разрыва первого рода функции  $f(x)$  для сходимости ряда Фурье достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t},$$

причем суммой ряда будет  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ .

Чаще всего на практике приходится иметь дело с функциями  $f(x)$  периода  $2\pi$  дифференцируемыми или кусочно-дифференцируемыми. (Функция  $f(x)$  называется **кусочно-дифференцируемой** на отрезке  $[a, b]$ , если этот отрезок разлагается на конечное число частичных промежутков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах имеет конечные предельные значения и односторонние производные при условии замены на этих концах значений функции упомянутыми предельными значениями.) Поэтому, подводя итог вышесказанного, сформулируем

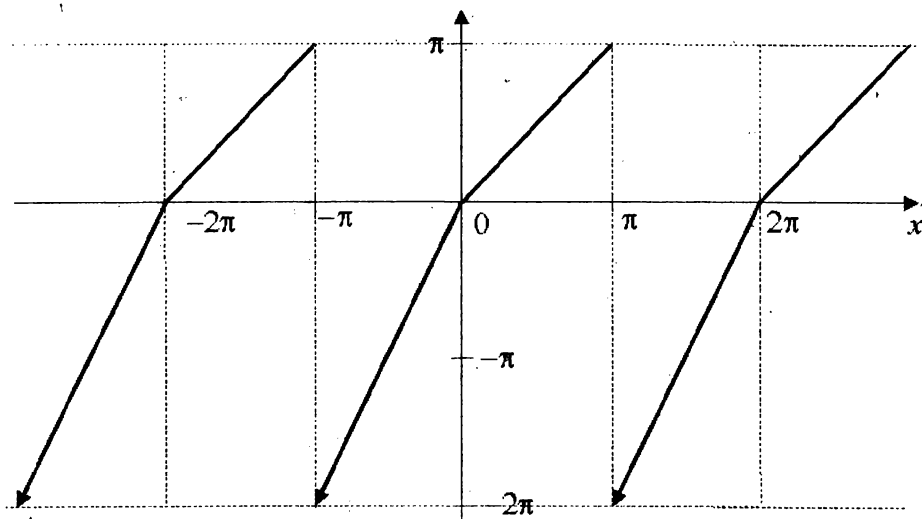
**Признак Дини-Липшица.** Если  $2\pi$ -периодическая функция  $f(x)$  кусочно-дифференцируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , то ее ряд Фурье в точке  $x_0$  сходится к  $f(x_0)$ , если  $x_0$  – точка непрерывности  $f(x)$ , и к  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ , если  $x_0$  – точка разрыва первого рода для  $f(x)$ .

**Пример.** Разложить функцию периода  $2\pi$ , заданную на интервале  $(-\pi, \pi)$  выражением

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье и указать функцию  $g(x)$ , к которой сходится полученный ряд.

*Решение.* Данная функция, очевидно, имеет разрывы первого рода в точках  $\pi + 2\pi k$ ,  $k$  – целое, и является кусочно-дифференцируемой функцией. Ее график имеет вид:



Вычислим коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 2x dx + \int_0^{\pi} x dx \right] = -\frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 2x \cos nx dx + \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{n} \int_{-\pi}^0 x d \sin nx + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x d \sin nx \right] = -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{n} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{2}{\pi n^2}, & n = 2k + 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 2x \sin nx dx + \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{n} \int_{-\pi}^0 x d \cos nx + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x d \cos nx \right] = \\
 &= -\frac{2(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2}{n} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{3}{n} (-1)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье функции имеет вид

$$f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}.$$

Согласно признаку Дини-Липшица ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в каждой точке к сумме, являющейся функцией периода  $2\pi$ , которая на отрезке  $[-\pi, \pi]$  задается формулой

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

## § 6. Признаки Жордана и Дирихле сходимости рядов Фурье

Приведем еще два признака поточечной сходимости ряда Фурье функции  $f(x)$ , основанные на другой идее. Сначала дадим некоторые определения.

**Определение.** Функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[a, b]$ , имеет на нем **ограниченное изменение**, если для любого разбиения отрезка  $T = \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  величина

$$V_a^b(f) = \sup_T \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \infty.$$

Примером функции с ограниченным изменением может служить любая монотонная на отрезке  $[a, b]$  функция.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **кусочно-монотонной** на отрезке  $[a, b]$ , если этот отрезок можно разбить на конечное число промежутков, внутри которых функция монотонна.

Очевидно, что кусочно-монотонная на отрезке  $[a, b]$  функция имеет ограниченное изменение на  $[a, b]$ .

Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица (5.4) порядка  $\alpha = 1$  на отрезке  $[a, b]$ , то она имеет на этом отрезке ограниченное изменение, причем

$$V_a^b(f) \leq L(b-a).$$

Если функция  $f(x)$  имеет ограниченную производную на отрезке  $[a, b]$ , то она имеет на этом отрезке ограниченное изменение.

Если функция  $f(x)$  представима на отрезке  $[a, b]$  в виде интеграла

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt + C,$$

где функция  $\varphi(t)$  абсолютно интегрируема (в собственном или несобственном смысле) на  $[a, b]$ , то  $f(x)$  имеет ограниченное изменение на этом отрезке, причем

$$V_a^b(f) = \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

**Критерий для функций с ограниченным изменением.** Для того, чтобы функция  $f(x)$  имела на отрезке  $[a, b]$  ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась на этом отрезке в виде разности двух монотонно возрастающих функций.

Теперь мы можем сформулировать признак сходимости ряда Фурье функции  $f(x)$ .

**Признак Жордана**<sup>1</sup>. Ряд Фурье функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  сходится к сумме  $S_0$  (определенной в § 5), если на некотором отрезке  $[x_0 - h, x_0 + h]$  функция имеет ограниченное изменение.

Мы не приводим доказательство, его можно найти в книге [2], т.3, гл.XIX.

Из этого признака, очевидно, следует

**Признак Дирихле.** Если функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  кусочно-монотонна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и имеет на нем не более чем конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится к сумме  $f(x_0)$  в каждой точке непрерывности и к сумме  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$  в каждой точке разрыва.

Вышеперечисленные условия известны как **условия Дирихле**.

Заметим, что признак Дини-Липшица и признаки Дирихле и Жордана не вытекают один из другого. Существуют примеры функций, удовлетворяющих условиям Дирихле, но не удовлетворяющих условиям Дини, и наоборот ([2], т.3, гл.XIX).

## § 7. Ряды Фурье непериодических функций

Мы построили теорию разложения заданной функции в ряд Фурье, предполагая, что сама эта функция определена для всех вещественных значений  $x$  и имеет период  $2\pi$ . Однако чаще всего приходится иметь дело с непериодическими функциями, заданными на некотором конечном отрезке.

---

<sup>1</sup> М. Жордан (1838-1922) – французский математик. Его основные результаты относятся к области теории функций (мера Жордана) и алгебры (жорданова форма матрицы).

Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Чтобы применить к ней изложенную выше теорию, введем вспомогательную функцию  $f^*(x)$ , определенную следующим образом. Положим:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x) \quad (-\pi < x \leq \pi), \\ f^*(-\pi) &= f^*(\pi), \end{aligned} \quad (7.1)$$

а для остальных вещественных  $x$  продолжим функцию  $f^*(x)$  периодически.

К построенной таким образом функции  $f^*(x)$  с периодом  $2\pi$ , можно уже применять указанные теоремы. Однако если речь идет о точке  $x_0$ , лежащей строго между  $-\pi$  и  $\pi$ , то при проверке условий этих теорем нам пришлось бы иметь дело, в силу (7.1), лишь с заданной функцией  $f(x)$ . По той же причине и коэффициенты разложения в ряд Фурье можно вычислять по формулам (2.4), не переходя к функции  $f^*(x)$ .

Особого внимания требуют концы отрезка  $x = \pm\pi$ . При проверке для функции  $f^*(x)$  условий какой-либо из теорем §§ 5-6, например, в точке  $x = \pi$ , нам пришлось бы иметь дело как со значениями вспомогательной функции  $f^*(x)$  слева от  $x = \pi$ , где они совпадают с соответствующими значениями  $f(x)$ , так и со значениями  $f^*(x)$  справа от  $x = \pi$ , где они совпадают уже со значениями  $f(x)$  справа от  $x = -\pi$ . Поэтому для случаев точек  $x = \pm\pi$ , например, в признаке Жордана нам следовало бы потребовать, чтобы  $f(x)$  имела ограниченное изменение как слева от  $x = \pi$ , так и справа от  $x = -\pi$ , а в качестве  $S_0$  в обоих случаях взять

$$S_0 = \frac{f^*(\pi+0) + f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f^*(-\pi+0) + f^*(-\pi-0)}{2} =$$

$$= \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Таким образом, даже если заданная функция  $f(x)$  непрерывна при  $x = \pm\pi$ , но не имеет периода  $2\pi$ , т.е.  $f(\pi) \neq f(-\pi)$ , то при соблюдении какого-либо из достаточных условий сходимости ряда Фурье суммой этого ряда будет число

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2},$$

отличное от  $f(-\pi)$  и от  $f(\pi)$ . Для такой функции разложение может иметь место лишь в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Следует также обратить внимание и на то, что если тригонометрический ряд (3.1) сходится в интервале  $(-\pi, \pi)$  к функции  $f(x)$ , то в силу  $2\pi$ -периодичности его членов, он сходится всюду, и его сумма  $S(x)$  оказывается  $2\pi$ -периодической функцией от  $x$ . Но вне указанного интервала эта сумма, вообще говоря, уже не совпадает с функцией  $f(x)$ .

Отметим, наконец, что вместо отрезка  $[-\pi, \pi]$  можно было бы взять любой отрезок  $[\alpha, \alpha + 2\pi]$  длины  $2\pi$ .

## **§ 8. Ряды Фурье периодических функций с произвольным периодом**

Рассмотрим теперь функции  $f(x)$ , имеющие произвольный период  $T = 2l$ . Разложение в ряд Фурье таких функций сводится к случаю

$T = 2\pi$  с помощью замены  $x = \frac{lt}{\pi}$  ( $-\pi \leq t \leq \pi$ ). При этом функции



$f(x)$  соответствует функция  $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$  периода  $2\pi$ . Для  $\varphi(t)$  ряд

Фурье имеет вид:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ntdt \quad (n=0,1,2,\dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \sin ntdt \quad (n=1,2,\dots).$$

Возвращаясь к прежней переменной  $x$ , получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n=0,1,2,\dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n=1,2,\dots).$$

Признаки сходимости, изложенные в §§ 5-6, справедливы и в данном случае.

## § 9. Ряды Фурье четных и нечетных периодических функций

Напомним, что функция  $f(x)$ , заданная на некотором промежутке  $(-a, a)$  (конечном или бесконечном), называется четной (нечетной), если для каждого  $x \in (-a, a)$

$$f(-x) = f(x) \text{ (соответственно } f(-x) = -f(x) \text{)}.$$

Легко показать, что для четной интегрируемой функции справедливо равенство

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad (9.1)$$

а для нечетной интегрируемой функции – равенство

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad (9.2)$$

Непосредственно из определения следует:

1. Произведение двух четных или двух нечетных функций – четная функция.
2. Произведение четной и нечетной функции – нечетная функция.

Пусть  $f(x)$  – заданная на отрезке  $[-\pi, \pi]$  четная функция. Как известно,  $\cos nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) является четной функцией, а функция  $\sin nx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – нечетной. Поэтому функция  $f(x)\cos nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) будет четной, а функция  $f(x)\sin nx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – нечетной.

В силу (2.4), (9.1), (9.2) для коэффициентов Фурье четной функции  $f(x)$  получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, ряд Фурье четной функции имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Пусть  $f(x)$  – заданная на отрезке  $[-\pi, \pi]$  нечетная функция. Рассуждая аналогично случаю четной функции, для коэффициентов Фурье нечетной функции  $f(x)$  получим:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, ряд Фурье нечетной функции имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

**Пример.** Разложить функцию  $f(x) = x^2$  в ряд Фурье по косинусам на  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти суммы числовых рядов

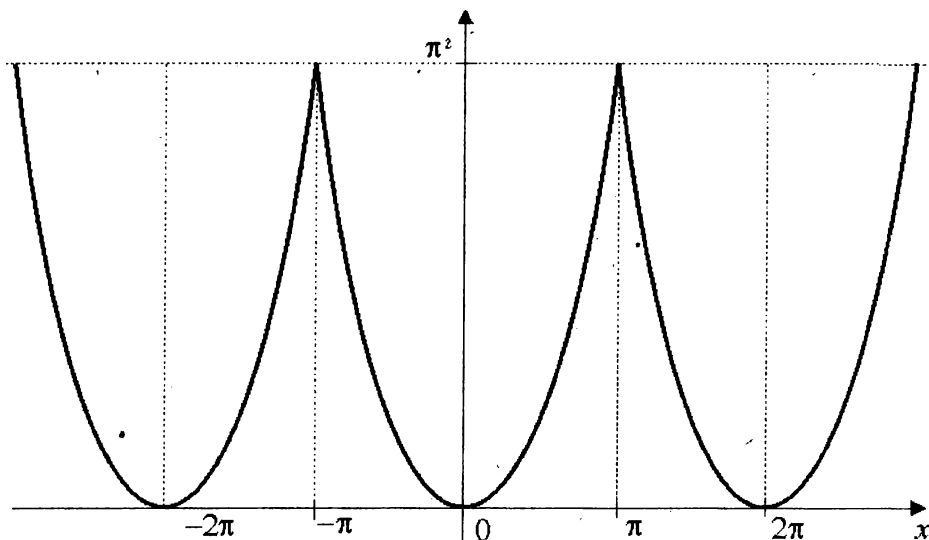
$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(x)$  на отрезке  $[0, \pi]$ . Чтобы получить разложение по косинусам продолжим ее на  $[-\pi, 0]$  четным образом (получившаяся при продолжении функция будет совпадать с функцией  $y = x^2$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ), а затем периодически, с периодом  $2\pi$ , продолжим ее на всю ось.

Продолженная функция – непрерывная и кусочно-дифференцируемая. Поэтому по признаку Дини-Липшица ее ряд Фурье сходится всюду на  $[0, \pi]$  к  $f(x)$ .

Вычисляя коэффициенты, найдем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$



$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4}{n^2} \cos \pi n - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

$$b_n = 0.$$

Поэтому для  $x \in [0, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Полагая в полученном разложении 1)  $x = \pi$  и 2)  $x = 0$ , получим:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

## § 10. Комплексная форма ряда Фурье

Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (10.1)$$

то, представив  $\cos nx$  и  $\sin nx$  по формулам Эйлера:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

и сделав подстановку в ряд (10.1), получим

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx}]. \end{aligned}$$

Обозначив

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10.2)$$

получим запись **ряда Фурье** (10.1) в **комплексной форме**:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где коэффициенты  $c_n$  вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из формул (10.2) следует, что коэффициенты  $c_n$  и  $c_{-n}$  являются комплексными сопряженными числами:  $c_{-n} = \overline{c_n}$ .

Если вместо  $[-\pi, \pi]$  нам задан отрезок  $[-l, l]$ , то соответствующий ряд Фурье в комплексной форме будет иметь вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i\pi nx}{l}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

## § 11. Равномерная сходимость рядов Фурье

В §§ 5-6 мы изучали признаки поточечной сходимости рядов Фурье абсолютно интегрируемых функций. Рассмотрим теперь аналогичные признаки равномерной сходимости.

**Признак Дини.** Ряд Фурье функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , сходится к ней равномерно на этом отрезке, если при некотором  $h > 0$  для всех  $x \in [a, b]$  интеграл

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt,$$

где

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

сходится равномерно относительно  $x$  (при  $t = 0$ ).

Следствием из него является

**Признак Липшица.** Ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к ней равномерно на отрезке  $[a, b]$ , если на некотором более широком отрезке  $[A, B]$  ( $A < a < b < B$ ) выполняется условие

$$|f(x') - f(x'')| \leq C |x' - x''|^\alpha,$$

где  $x', x''$  – любые точки из  $[A, B]$ , а  $C$  и  $\alpha$  – положительные постоянные ( $\alpha \leq 1$ ).

Очевидно, условие Липшица при  $\alpha = 1$  выполняется, а следовательно, ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к ней равномерно на отрезке  $[a, b]$ , если на более широком отрезке функция  $f(x)$  имеет ограниченную производную  $f'(x)$ .

Это условие содержит как частный случай следующий

**Признак Дирихле-Жордана.** Ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к ней равномерно на отрезке  $[a, b]$ , если на некотором более широком

отрезке  $[A, B]$  функция  $f(x)$  непрерывна и имеет ограниченное изменение.

В частности, если функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , непрерывна на этом отрезке и имеет на нем ограниченное изменение, а также удовлетворяет условию

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

то ее ряд Фурье на всем отрезке сходится к ней равномерно.

Доказательство этих признаков можно найти в книге [2], т.3, гл.XIX.

Сформулируем еще один признак, который нам понадобится в дальнейшем.

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Пусть  $h > 0$  любое. Величина

$$\omega(h, f) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq h} |f(x_1) - f(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in [a, b],$$

называется **модулем непрерывности  $f(x)$  на  $[a, b]$** .

**Признак Дини-Липшица.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[-\pi, \pi]$  и ее модуль непрерывности на  $[-\pi, \pi]$  удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h, f) \ln \frac{1}{h} = 0,$$

то ряд Фурье  $f(x)$  сходится равномерно на этом отрезке.

Доказательство можно найти в книге [9], гл.IV.

## § 12. Явление Гиббса

Исследуем поведение частных сумм ряда Фурье данной функции вблизи точки разрыва этой функции. Рассмотрим пример, где интересующее нас явление выступает наиболее отчетливо.

Рассмотрим  $2\pi$ -периодическую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad (12.1)$$

равную

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

в интервале  $(0, 2\pi)$ . В окрестности точки  $x = 0$  ряд (12.1) не может равномерно сходиться, поскольку  $\varphi(x)$  имеет разрыв первого рода в этой точке. Для  $n$ -ой частной суммы ряда (12.1)

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \quad (12.2)$$

при  $0 < x \leq \pi$  имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + s_n(x) &= \int_0^x \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = \\ &= \int_0^x \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \int_0^x \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \cos nt dt = \\ &= \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt + \int_0^x \sin nt \left( \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^x \cos nt dt = \\ &= \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (12.3)$$

равномерно относительно  $x \in (0, \pi]$ . Пояснения требует оценка второго и третьего слагаемого в предпоследнем члене цепи. Например, второе слагаемое можно записать в виде:

$$I_2 = \int_0^x \sin nt \, g(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x \sin nt \, g(t) dt - \frac{1}{2} \int_{\pi/n}^{x+\pi/n} \sin nt \, g\left(t - \frac{\pi}{n}\right) dt =$$



$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \sin nt \, g(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^{x+\pi/n} \sin nt \, g\left(t - \frac{\pi}{n}\right) dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{\pi/n}^x \sin nt \left[ g(t) - g\left(t - \frac{\pi}{n}\right) \right] dt,$$

откуда в силу того, что  $|g(t)| \leq M$ , полагая  $g(t) = 0$  вне  $(0, \pi)$ , будем иметь

$$|I_2| \leq \frac{1}{2} \frac{\pi}{n} M + \frac{1}{2} \frac{\pi}{n} M + \frac{1}{2} \int_{-x}^{\infty} \left| g(t) - g\left(t - \frac{\pi}{n}\right) \right| dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где правая часть не зависит от  $x \in (0, \pi]$ , поэтому левая стремится к нулю равномерно относительно указанных  $x$ .

Положив теперь в (12.3)  $x = \frac{\pi}{n}$  и перейдя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$s_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt > \frac{\pi}{2}. \quad (12.4)$$

Действительно, справедливо равенство

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (12.5)$$

Его можно получить из следующих соображений. Полагая в (12.3)  $x = \pi$  и учитывая, что  $s_n(\pi) = 0$  (см. (12.2)), будем иметь

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{t} dt + o(1) \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n \rightarrow \infty), \quad (12.6)$$

и так как здесь левая часть не зависит от  $n$ , то получим равенство (12.5).

Далее, интеграл справа в (12.6) можно записать в виде ряда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(k\pi + u)}{k\pi + u} du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad a_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{k\pi + u} du. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Ясно, что числа  $a_k$  неотрицательны и убывают к нулю, поэтому справа в (12.7) стоит ряд Лейбница. В частности,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx < a_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

откуда и следует (12.4).

С другой стороны,

$$\varphi(0+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Вычисления показывают, что отношение

$$\frac{s_+}{\frac{1}{2}(\varphi(0+0) - \varphi(0-0))} = \frac{s_+}{\varphi(0+0)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1,1789... \quad (12.8)$$

Тот факт, что это отношение больше 1, а не равно 1, называется **явлением Гиббса**. Оно было обнаружено впервые эмпирическим путем Д. Ч. Гиббсом, американским физиком-теоретиком (1839-1903).

На рис.12.1 изображен схематический график функции  $\varphi(x)$  и ее  $n$ -ой частной суммы  $s_n(x)$ . На отрезке  $[\delta, 2\pi - \delta]$ , где  $\delta > 0$ , при достаточно большом  $n$  функция  $s_n(x)$  колеблется вблизи  $\varphi(x)$ , так как  $s_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на этом отрезке. С другой стороны, вблизи  $x = 0$  график  $s_n(x)$  резко отклоняется от  $\varphi(x)$  вверх – это и есть явление Гиббса. Затем он резко опускается к точке

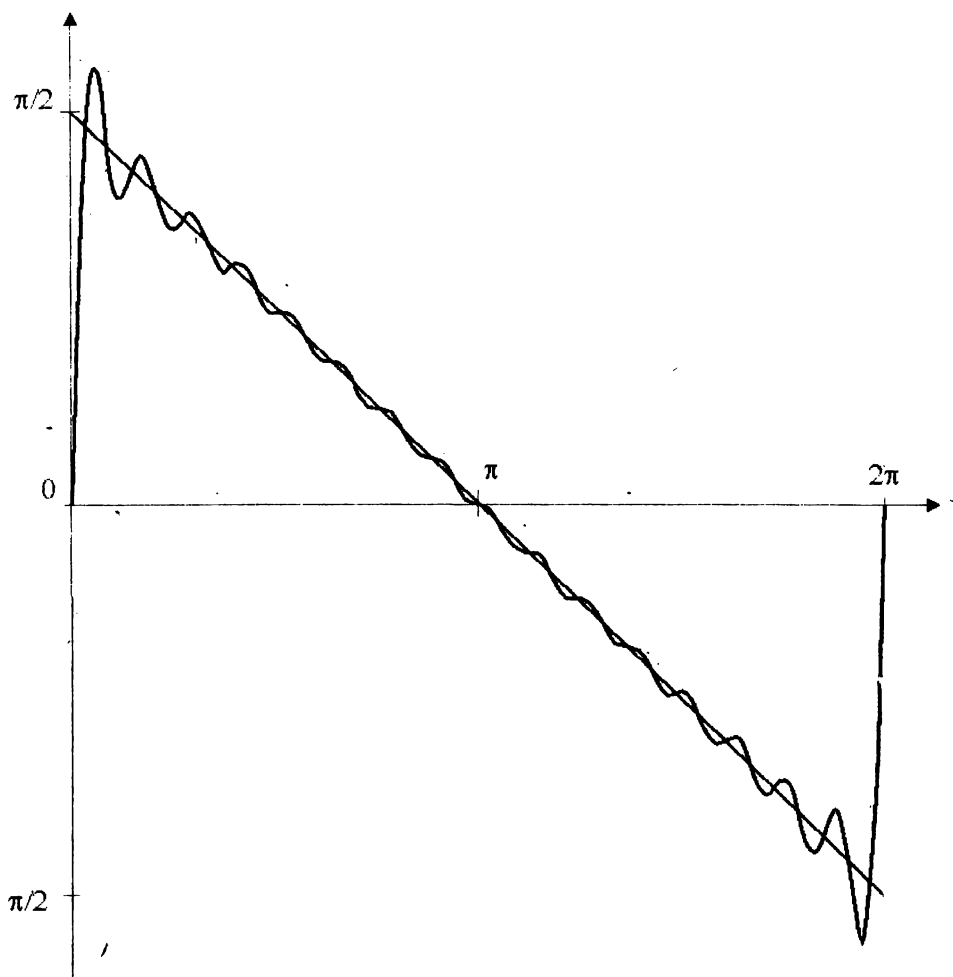


**Рис. 12.1**

$x=0$  на оси  $x$ . Вблизи точки  $x=2\pi$  имеет место подобное явление.

Заметим, что и для произвольной интегрируемой функции  $f(x)$ , непрерывной вместе со своей производной на полуинтервалах  $[a, x_0)$ ,  $(x_0, b]$ , имеющей вместе со своей производной разрыв первого рода

в точке  $x_0$ , имеет место подобное явление в окрестности точки  $x_0$ . Это вытекает из возможности представления функции  $f(x)$  в виде суммы  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  – непрерывная кусочно-дифференцируемая на  $[a, b]$ , а  $f_2(x) = \frac{\kappa}{\pi} \varphi(x - x_0)$ , где  $\kappa$  – скачок  $f(x)$ . Ряд Фурье  $f_1(x)$  сходится к  $f_1(x)$  равномерно на  $[a', b'] \subset [a, b]$ , а для функции  $f_2(x)$ , следовательно, и для  $f(x)$ , имеет место явление Гиббса с тем же отношением (12.8):

$$\frac{s_+(x_0)}{\frac{1}{2}(f(x_0+0) - f(x_0-0))} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt,$$

где теперь

$$s_+(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ S_n \left( x_0 + \frac{\pi}{n} \right) - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} \right],$$

а  $S_n(x)$  – частная сумма ряда Фурье  $f(x)$ .

### § 13. Операции над рядами Фурье. Полнота тригонометрической системы

**1. Почленное интегрирование ряда Фурье.** Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (13.1)$$

Введем функцию

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx \quad (13.2)$$

при  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Эта функция непрерывна, с ограниченным изменени-

ем (см. [2], т.3, гл.XV) и имеет период  $2\pi$ , так как

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \pi a_0 = 0.$$

Поэтому по признаку Жордана (§ 6) она разлагается в ряд Фурье на  $[-\pi, \pi]$ :

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (13.3)$$

(который согласно признаку Дирихле-Жордана (§ 11) равномерно сходится к ней).

Между коэффициентами рядов (13.1) и (13.3) существует простая связь. Действительно, проинтегрировав по частям, будем иметь для  $n \geq 1$ :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx,$$

т.е.

$$A_n = -\frac{b_n}{n}.$$

И аналогично:

$$B_n = \frac{a_n}{n}.$$

Для нахождения  $A_0$  положим в (13.3)  $x = 0$ :

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Подставив в разложение (13.3) найденные коэффициенты, перепишем его в виде

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n (1 - \cos nx)}{n}.$$

Отсюда, учитывая равенство (13.2), имеем

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx. \quad (13.4)$$

Очевидно, и для любого отрезка  $[x', x''] \subseteq [-\pi, \pi]$  имеет место подобное соотношение:

$$\int_{x'}^{x''} f(x)dx = \int_{x'}^{x''} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'}^{x''} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

Таким образом, интеграл от функции  $f(x)$  получается почленным интегрированием соответствующего ей ряда Фурье. Замечателен тот факт, что мы установили возможность почленного интегрирования ряда Фурье, не делая предположения о сходимости самого ряда (13.1) к функции  $f(x)$ .

Вместо отрезка  $[-\pi, \pi]$  может быть выбран любой другой отрезок длины  $2\pi$ . Все вышесказанное относится и к рядам, содержащим одни лишь косинусы или синусы и рассматриваемым на отрезке  $[0, \pi]$ .

**2. Почленное дифференцирование ряда Фурье.** Пусть на отрезке  $[-\pi, \pi]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условию  $f(-\pi) = f(\pi)$  и имеющая производную  $f'(x)$  всюду, кроме, быть может, конечного числа точек; пусть, далее, эта производная сама интегрируема в указанном промежутке. Тогда справедливо представление:

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0)$$

и, как было показано выше, ряд Фурье (13.1) функции  $f(x)$  получается из ряда Фурье функции  $f'(x)$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx) \quad (13.5)$$

почленным интегрированием (при наложенных на  $f(x)$  условиях сво-

бодного члена в последнем разложении не будет

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

Следовательно, и обратно – ряд (13.5) для производной  $f'(x)$  может быть получен из ряда (13.1), отвечающего данной функции  $f(x)$ , почленным дифференцированием.

Замечание 1. Следует обратить внимание на роль, которую играет здесь предположение о периодичности функции  $f(x)$ . При нарушении

этого условия свободный член  $\frac{a'_0}{2}$  ряда Фурье для  $f'(x)$  был бы отличен от нуля, и поэтому упомянутый ряд не мог бы быть получен из ряда (13.1) почленным дифференцированием.

Замечание 2. При получении ряда Фурье (13.5) для  $f'(x)$  путем почленного дифференцирования ряда Фурье исходной функции  $f(x)$  ни разу не шла речь о сходимости ряда (13.5) к  $f'(x)$ ; эту сходимость надо устанавливать отдельно, пользуясь достаточными признаками.

**3. Полнота тригонометрической системы.** Покажем, что если непрерывная на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функция  $f(x)$  имеет коэффициенты Фурье, все равные нулю, то и сама эта функция тождественно равна нулю. Действительно, в этом случае из равенства (13.4) ясно, что

$$\int_0^x f(x) dx = 0$$

при всех  $x$ , откуда, дифференцируя по  $x$ , в силу непрерывности подынтегральной функции, получим:

$$f(x) \equiv 0.$$

Иными словами, кроме функции, тождественно равной нулю, не существует непрерывной функции, которая на отрезке  $[-\pi, \pi]$  была бы ортогональна ко всем функциям тригонометрической системы

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (13.6)$$

Это свойство называют **полнотой** тригонометрической системы в классе непрерывных функций.

Если две непрерывные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то они тождественны, так как их разность  $f_1(x) - f_2(x)$  будет иметь коэффициенты Фурье, равные нулю. Таким образом, непрерывная функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье. Это другая формулировка свойства полноты тригонометрической системы.

Можно расширить понятие полноты, рассматривая абсолютно интегрируемые функции (непрерывные и разрывные). Назовем функцию **эквивалентной нулю**, если она в рассматриваемом промежутке ортогональна ко всякой интегрируемой функции. Тогда можно утверждать, что тригонометрическая система (13.6) полна в классе абсолютно интегрируемых функций, т.е. кроме функций, эквивалентных нулю, не существует абсолютно интегрируемой функции, которая на отрезке  $[-\pi, \pi]$  была бы ортогональна ко всем функциям системы (13.6) (см. [2], т.3, гл. XX).

Замечание 3. Все сказанное остается справедливым и порознь для систем

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

или

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$$

но на отрезке  $[0, \pi]$ .

## § 14. Равномерное приближение функций. Теоремы Вейерштрасса

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция  $f(x)$ , которую мы хотим приблизить другой функцией  $g(x)$ . Если мы заинтересованы в малом отклонении одной функции от другой в каждой точке, то за меру приближения принимают их максимальное отклонение на  $[a, b]$ , т.е. величину

$$\delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

В этом случае говорят о **равномерном приближении** функции  $f(x)$  функцией  $g(x)$ .



Приведем две фундаментальные теоремы Вейерштрасса<sup>1</sup>, относящиеся к равномерному приближению непрерывных функций.

**Теорема 14.1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и удовлетворяет условию

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

то, каково бы ни было число  $\varepsilon > 0$ , найдется такой тригонометрический многочлен

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx),$$

что равномерно для всех  $x \in [-\pi, \pi]$  будет

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \quad (14.1)$$

*Доказательство.* Сначала построим такую кусочно-линейную функцию  $\varphi(x)$ , чтобы всюду на  $[-\pi, \pi]$  выполнялось неравенство

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14.2)$$

Для этого разобьем отрезок  $[-\pi, \pi]$  точками

$$-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_k = \pi$$

на столь малые части, чтобы в каждой из них колебание функции  $f(x)$

было  $< \frac{\varepsilon}{2}$ . Функцию  $\varphi(x)$  определим на  $[-\pi, \pi]$ , полагая ее на

$[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , равной линейной функции

$$f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i),$$

<sup>1</sup> К. Вейерштрасс (1815-1897) – немецкий математик, ввел понятие равномерной сходимости. Ему принадлежат многие теоремы о сходимости рядов.

которая на концах промежутка совпадает с  $f(x)$ . Геометрически это означает, что мы вписываем ломаную линию в кривую  $y = f(x)$ . Если обозначить через  $m_i$  и  $M_i$  наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  в  $i$ -м промежутке, то по построению  $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2}$ , а так как в этом промежутке значения функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  содержатся между  $m_i$  и  $M_i$ , то на  $[-\pi, \pi]$  выполняется неравенство (14.2).

Функция  $\varphi(x)$ , как и  $f(x)$ , непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и удовлетворяет условию

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi),$$

а также как кусочно-монотонная функция она имеет на этом отрезке ограниченное изменение. Поэтому, согласно признаку Дирихле-Жордана,  $\varphi(x)$  разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx).$$

Следовательно, взяв в качестве многочлена  $T(x)$   $n$ -ю частную сумму этого ряда при достаточно большом  $n$ , будем иметь:

$$|\varphi(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (14.3)$$

для всех рассматриваемых значений  $x$ .

Из (14.2) и (14.3) вытекает (14.1).  $\square$

Возьмем теперь последовательность положительных чисел  $\{\varepsilon_k\}$ , убывающих до нуля, и для каждого  $\varepsilon = \varepsilon_k$  построим многочлен  $T(x) = T_k(x)$ , о котором шла речь в теореме 14.1. Мы получим последовательность тригонометрических многочленов  $\{T_k(x)\}$ , сходящуюся

к функции  $f(x)$  равномерно на  $[-\pi, \pi]$ . Переходя от последовательности к бесконечному ряду, получим эквивалентную формулировку теоремы 14.1: при указанных в теореме 14.1 условиях функция  $f(x)$  разлагается в равномерно сходящийся ряд, членами которого являются тригонометрические многочлены.

Из теоремы 14.1 следует (см. [2], т.3, гл. XX).

**Теорема 14.2.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то, каково бы ни было число  $\varepsilon > 0$ , найдется такой целый алгебраический многочлен

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n,$$

что равномерно для всех  $x \in [a, b]$  будет

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

## § 15. Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство частных сумм тригонометрического ряда Фурье. Формула Парсеваля

При приближении функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  функцией  $g(x)$  можно потребовать, чтобы функции были близки лишь "в среднем". В этом случае за меру их близости берут их **среднее отклонение**

$$\delta' = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

или **среднее квадратичное отклонение**

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}.$$

Вместо последнего выражения чаще всего рассматривают величину

$$\Delta = (b-a) \delta''^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$$

**Определение.** Функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется функцией, **интегрируемой с квадратом**, если

$$\int_a^b f(x) dx < \infty \text{ и } \int_a^b f^2(x) dx < \infty.$$

Пусть  $f(x)$  – заданная на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функция, интегрируемая с квадратом, и  $n$  – фиксированное натуральное число. Поставим себе задачу: из всех тригонометрических многочленов порядка  $n$

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

найти тот, который осуществляет наилучшее – в смысле среднего квадратичного отклонения – приближение функции  $f(x)$ , т.е. доставляет минимум величине

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx.$$

Подставив сюда вместо  $T_n(x)$  его развернутое выражение, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left( \alpha_0 + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right) dx + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \left( \alpha_0 + \sum_{m=1}^n (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right)^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - 2 \sum_{m=1}^n \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mxdx - \\ &- 2 \sum_{m=1}^n \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mxdx + \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_0^2 dx + 2 \sum_{m=1}^n \alpha_0 \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mxdx + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \alpha_0 \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mxdx + \sum_{m=1}^n \alpha_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos mx)^2 dx + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \alpha_m \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin mxdx + \sum_{m=1}^n \beta_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{m=1}^n \alpha_m \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin mxdx + \sum_{m=1}^n \beta_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx)^2 dx + \\
& + 2 \sum_{k < m} \alpha_k \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mxdx + 2 \sum_{k < m} \alpha_k \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mxdx + \\
& + 2 \sum_{k < m} \beta_k \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mxdx + 2 \sum_{k < m} \beta_k \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mxdx.
\end{aligned}$$

Откуда, ввиду ортогональности функций основной тригонометрической системы, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\Delta_n = & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - 2 \sum_{m=1}^n \alpha_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mxdx - \\
& - 2 \sum_{m=1}^n \beta_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mxdx + \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_0^2 dx + \sum_{m=1}^n \alpha_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos mx)^2 dx + \\
& + \sum_{m=1}^n \beta_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx)^2 dx.
\end{aligned}$$

Обозначив через  $a_0, a_m, b_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ , перепишем  $\Delta_n$  в виде

$$\begin{aligned}
\Delta_n = & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\pi\alpha_0 a_0 - 2\pi \sum_{m=1}^n \alpha_m a_m - 2\pi \sum_{m=1}^n \beta_m b_m + \\
& + 2\pi\alpha_0^2 + \pi \sum_{m=1}^n \alpha_m^2 + \pi \sum_{m=1}^n \beta_m^2.
\end{aligned}$$

Выделяя полный квадрат, окончательно получим:

$$\begin{aligned}
\Delta_n = & \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \right] + \\
& + \pi \left[ 2 \left( \alpha_0 - \frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{m=1}^n (\alpha_m - a_m)^2 + \sum_{m=1}^n (\beta_m - b_m)^2 \right].
\end{aligned}$$

Теперь ясно, что  $\Delta_n$  достигает своего минимума тогда, когда обращается в нуль последнее слагаемое, а это будет при

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}, \alpha_m = a_m, \beta_m = b_m \quad (m=1, 2, \dots; n).$$

Это и есть **экстремальное свойство частных сумм тригонометрического ряда Фурье**: из всех тригонометрических многочленов порядка  $n$  наименьшее значение величине  $\Delta_n$  доставляет  $n$ -я частная сумма ряда Фурье функции  $f(x)$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Это наименьшее значение дается равенством

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \right], \quad (15.1)$$

которое называется **тождеством Бесселя**<sup>1</sup>.

Так как величина  $\delta_n \geq 0$ , из соотношения (15.1) получим:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

и, переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , будем иметь:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (15.2)$$

Это неравенство называется **неравенством Бесселя**. Из него следует, что ряд (15.2) сходится для любой функции, интегрируемой с квадратом.

При возрастании  $n$  величина  $\delta_n$  убывает, поскольку в (15.1) добавляются новые отрицательные слагаемые. Чем больше  $n$ , тем лучше сумма  $S_n(x)$  приближает в среднем (квадратичном) функцию  $f(x)$ . В свя-

<sup>1</sup> Ф.В. Бессель (1784-1846) – немецкий математик и астроном.

зи с этим естественно возникает вопрос: можно ли, увеличивая  $n$ , сделать среднее квадратичное отклонение сколь угодно малым, т.е. стремится ли  $\delta_n$  к нулю при  $n \rightarrow \infty$ ?

На этот вопрос можно дать положительный ответ. Справедлива следующая теорема, которую впервые строго доказал А. М. Ляпунов<sup>1</sup> (для случая ограниченной функции).

**Теорема 15.1.** Какова бы ни была функция  $f(x)$ , интегрируемая с квадратом, всегда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0, \quad (15.3)$$

и справедливо равенство:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (15.4)$$

называемое **формулой Парсеваля**<sup>2</sup>.

*Доказательство.* Если соотношение (15.3) уже доказано, то равенство (15.4), очевидно, следует из него и тождества Бесселя. Докажем теперь справедливость (15.3).

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Пусть сначала функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и удовлетворяет условию  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Тогда по теореме 14.1 существует такой тригонометрический многочлен  $T(x)$  (порядка  $N$ ), что

$$|f(x) - T(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}},$$

где  $\varepsilon > 0$  – произвольное число. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

<sup>1</sup> А. М. Ляпунов (1857-1918) – русский математик. Достиг значительных результатов в области дифференциальных уравнений и теории вероятностей.

<sup>2</sup> Французский математик М. Парсеваль получил это равенство в 1805 г.

В силу экстремального свойства частных сумм ряда Фурье при любом  $n \geq N(T(x))$  можно рассматривать как многочлен порядка  $n$  тем более будем иметь:

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

так что  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

2. Для того чтобы распространить это заключение и на другие случаи, установим одно вспомогательное неравенство. Пусть интегрируемая с квадратом функция  $f(x)$  представляется в виде суммы  $f'(x) + f''(x)$  двух функций, интегрируемых с квадратом. Обозначая штрихами относящиеся к ним величины, будем иметь

$$f(x) - S_n(x) = [f'(x) - S'_n(x)] + [f''(x) - S''_n(x)],$$

откуда

$$[f(x) - S_n(x)]^2 \leq 2 \left\{ [f'(x) - S'_n(x)]^2 + [f''(x) - S''_n(x)]^2 \right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx &\leq \\ &\leq 2 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x) - S'_n(x)]^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [f''(x) - S''_n(x)]^2 dx \right\}, \end{aligned}$$

или

$$\delta_n \leq 2\{\delta'_n + \delta''_n\}.$$

Заметим, что из тождества Бесселя (15.1), примененного к функции  $f''(x)$ , следует



$$\delta_n'' \leq \int_{-\pi}^{\pi} f''^2(x) dx.$$

Таким образом, получим нужное нам неравенство:

$$\delta_n \leq 2 \left\{ \delta_n' + \int_{-\pi}^{\pi} f''^2(x) dx \right\}. \quad (15.5)$$

3. Пусть теперь функция  $f(x)$  интегрируема в собственном смысле (следовательно, ограничена) на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Изменяя, если надо, значение функции на одном из концов отрезка, можем считать, что  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Построим вспомогательную функцию  $\varphi(x)$ , как и при доказательстве теоремы 14.1, причем дробление отрезка выберем такое, что

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i \frac{\varepsilon}{4\Omega},$$

где  $\varepsilon$  – фиксированное произвольное положительное число,  $\omega_i$  – колебание функции  $f(x)$  в  $i$ -ом промежутке, а  $\Omega$  – полное колебание функции  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Положим

$$f'(x) = \varphi(x), \quad f''(x) = f(x) - \varphi(x).$$

В силу п.1,  $\delta_n' \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , так что, начиная с некоторого  $n$ ,

$$\delta_n' < \frac{\varepsilon}{4}.$$

С другой стороны, так как в  $i$ -ом промежутке

$$|f''(x)| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \omega_i,$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2(x) dx = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''^2(x) dx \leq \sum_i \omega_i^2 \Delta x_i \leq \Omega \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда, в силу (15.5), ясно, что для достаточно больших  $n$  будет

$$\delta_n < \varepsilon.$$

4. Пусть, наконец, функция  $f(x)$  интегрируема в несобственном смысле, но с квадратом (!). Для простоты предположим, что единственной особой точкой для  $f(x)$  (и для  $f^2(x)$ ) будет  $x = \pi$ . Тогда для заданного  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\eta > 0$ , что

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим в этом случае

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi \leq x < \pi - \eta, \\ 0, & x \geq \pi - \eta \end{cases}$$

и

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < \pi - \eta, \\ f(x), & x \geq \pi - \eta. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2(x) dx = \int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

С другой стороны, к функции  $f'(x)$ , интегрируемой в собственном смысле, применим результат п.3. Снова воспользовавшись неравенством (15.5), получим, что  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Формулу Парсеваля иногда называют "уравнением замкнутости", а основную тригонометрическую систему – **замкнутой**.

**Пример.** Написать формулу Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha, \\ 0, & \alpha < |x| < \pi, \end{cases}$$

и, исходя из нее, найти сумму ряда

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}, \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

*Решение.* Очевидно, функция  $f(x)$  интегрируема с квадратом на  $(-\pi, \pi)$ , причем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Поэтому согласно теореме Ляпунова для  $f(x)$  имеет место формула Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Вычислим коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ . Очевидно,  $f(x)$  — четная функция. Следовательно,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos nx dx = \frac{2 \sin n\alpha}{\pi n},$$

$$b_n = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2 n\alpha}{\pi^2 n^2} = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Отсюда видно, что

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \left( \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha^2}{\pi^2} \right) \frac{\pi^2}{4} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2},$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \sin^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2} = \\ = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}$$

(см. пример из § 9).

## § 16. Суммирование тригонометрических рядов Фурье

**1. Постановка задачи.** Пусть задан тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (16.1)$$

про который известно лишь то, что он является рядом Фурье некоторой функции  $f(x)$ . Естественно возникает вопрос: можно ли найти эту функцию  $f(x)$ ? Если заранее известно, что ряд (16.1) сходится к  $f(x)$ , то

$f(x)$  получается как предел частных сумм этого ряда. Но что делать, если сходимости ряда установить не удалось или если ряд расходящийся? В этом случае мы либо не знаем, существует или нет предел частных сумм, или знаем, что он не существует. Поэтому определим операцию, которая позволила бы нам найти функцию по ее ряду Фурье, независимо от того, сходится ряд или нет. Эту операцию назовем **суммированием** ряда. Корректно определенная операция суммирования должна приводить к обычной сумме ряда, если он сходится.

**2. Способ средних арифметических.** Пусть функция  $f(x)$  имеет период  $2\pi$ , абсолютно интегрируема на периоде и  $S_n(x)$  – частные суммы ее ряда Фурье,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1} \quad (16.2)$$

и

$$\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_n(x)}{n+1}, \quad (16.3)$$

где  $D_k(x)$  – ядро Дирихле. Сумма  $\sigma_n(x)$  называется **суммой Фейера**<sup>1</sup>, а  $\Phi_n(x)$  – **ядром Фейера**.

Для  $\sigma_n(x)$  можно получить и интегральную формулу. В § 3 мы показали, что

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt. \quad (16.4)$$

Отсюда и из формул (16.2) и (16.3) следует, что

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t) dt. \quad (16.5)$$

Интеграл в правой части (16.5) называется **интегралом Фейера**.

**Лемма 16.1.** Ядро Фейера  $\Phi_n(t)$

1) является непрерывной,  $2\pi$ -периодической, четной функцией;

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} \Phi_n(t) dt = 1;$$

$$3) \Phi_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\pi(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}, & t \neq 2\pi m, \\ \frac{n+1}{2\pi}, & t = 2\pi m, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

<sup>1</sup> Л. Фейер (1880-1959) – венгерский математик.

*Доказательство.* Свойства 1) и 2) вытекают из соответствующих свойств ядра Дирихле. Докажем свойство 3). Если  $t = 2\pi m$ ,

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то, пользуясь равенством  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  и соответствующей формулой для ядра Дирихле, получим

$$\begin{aligned}\Phi_n(2\pi m) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(2\pi m) = \frac{1}{(n+1)\pi} \sum_{k=0}^n \left(k + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \left[ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} \right] = \frac{n+1}{2\pi}.\end{aligned}$$

Если же  $t \neq 2\pi m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}.$$

Применяя известную тригонометрическую формулу

$$2\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

получим

$$2\sin \frac{t}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t = \cos kt - \cos(k+1)t$$

и поэтому

$$\begin{aligned}2\sin \frac{t}{2} \sum_{k=0}^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t &= \sum_{k=0}^n (\cos kt - \cos(k+1)t) = \\ &= 1 - \cos(n+1)t = 2\sin^2 \frac{n+1}{2}t,\end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}. \square$$

Следовательно,

$$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2\pi(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Отметим еще два полезных свойства ядра Фейера:

4)  $\Phi_n(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$ ;

5) при любом  $\delta, 0 < \delta \leq \pi$ , выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) = 0.$$

Свойство 4) следует из свойства 3), а свойство 5) – из соотношения

$$0 \leq \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) = \max_{\delta \leq |t| \leq \pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2\pi(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\pi(n+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 16.2.** (Фейер) Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и удовлетворяет условию

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad (16.6)$$

то последовательность ее сумм Фейера равномерно сходится на этом отрезке к  $f(x)$ .

*Доказательство.* Зафиксируем точку  $x \in [-\pi, \pi]$  и зададим произвольно  $\varepsilon > 0$ . Пользуясь интегральным представлением (16.5) и свойствами ядра Фейера, будем иметь

$$\begin{aligned}
 |\sigma_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t) dt - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt \right| = \\
 &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) [f(x+t) - f(x)] dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt.
 \end{aligned} \tag{16.7}$$

Легко убедиться в том, что периодическое продолжение функции  $f(x)$  равномерно непрерывно на всей числовой оси. Это следует из непрерывности  $f(x)$  на  $[-\pi, \pi]$  и равенства (16.6). Поэтому для заданного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ ,  $0 < \delta \leq \pi$ , что для любых точек  $x, x' \in \mathbf{R}$ , для которых  $|x' - x| < \delta$ , выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Представим интеграл, стоящий в правой части неравенства (16.7), в виде суммы трех интегралов:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \tag{16.8}$$

и оценим каждый из них. В силу равномерной непрерывности  $f(x)$  имеем

$$\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16.9}$$

Далее, в силу непрерывности, функция  $f(x)$  ограничена на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , т.е. существует некоторая постоянная  $c > 0$ , такая, что  $|f(x)| \leq c$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ . Очевидно, что и периодическое продолжение  $f(x)$  ограничено по абсолютной величине той же постоянной:



$$|f(x)| \leq c, x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt &\leq \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) [|f(x+t)| + |f(x)|] dt \leq \\ &\leq 2c \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) dt \leq 2c \max_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi_n(t) \int_{\delta}^{\pi} dt < 2c\pi \max_{\delta \leq t \leq \pi} \Phi_n(t) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$  согласно свойству 5). Поэтому существует такое  $n_0$ , что при  $n > n_0$  выполняется неравенство

$$\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.10)$$

Аналогично,

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n > n_0. \quad (16.11)$$

Из (16.7) – (16.11) следует, что при  $n > n_0$

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

и поскольку  $n_0$  выбрано независимым от точки  $x \in [-\pi, \pi]$ , то последнее соотношение означает, что последовательность сумм Фейера  $\{\sigma_n(x)\}$  равномерно сходится к  $f(x)$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

**Следствие.** Если ряд Фурье непрерывной на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции  $f(x)$ , удовлетворяющей условию (16.6), сходится в некоторой точке, то он сходится в ней к значению функции.

*Доказательство.* Из свойств предела следует, что если числовая последовательность сходится, то последовательность средних арифметических ее членов сходится к тому же пределу. Поэтому, если при

некотором  $x \in [-\pi, \pi]$  существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = A$ , то и

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = A$ . Но по теореме 16.2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x)$ , следовательно,

$A = f(x)$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ .  $\square$

Справедлива также следующая

**Теорема 16.3.** Ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  суммируется способом средних арифметических к этой функции в каждой точке ее непрерывности и к значению  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  в точках разрыва первого рода.

*Доказательство* можно найти в книге [1], гл. VI.

**Пример.** Просуммировать способом средних арифметических ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

*Решение.*  $k$ -я частная сумма этого ряда равна (см. лемму 3.1)

$$S_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^k \cos mx = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Составим суммы Фейера

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1} = \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin^2\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда при всех  $x$

$$\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 0.$$

Отметим, что наш ряд не является рядом Фурье функции  $\sigma(x) \equiv 0$ , так как он не равен тождественно нулю. С другой стороны, этот ряд не может быть и рядом Фурье любой другой абсолютно интегрируемой функции  $f(x)$ , поскольку его коэффициенты  $a_n = 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) не стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

### 3. Метод Пуассона-Абеля<sup>1</sup> (способ степенных множителей).

Пусть функция  $f(x)$  имеет период  $2\pi$  и абсолютно интегрируема на периоде. Рассмотрим ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (16.12)$$

Для  $0 < r < 1$  составим ряд

$$f(x, r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (16.13)$$

Так как  $a_n \rightarrow 0$  и  $b_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то существует такая постоянная  $M > 0$ , что

$$|a_n| \leq M, \quad |b_n| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, ряд (16.13) мажорируется сходящимся рядом

$$2M \sum_{n=0}^{\infty} r^n, \text{ а значит, сходится.}$$

<sup>1</sup> Д. Пуассон (1781-1840) – французский физик и математик. Известны его работы об устойчивости солнечной системы и по теории упругости, в теории вероятностей известно распределение Пуассона. Н. Абель (1802–1829) – норвежский математик, доказал, что уравнение пятой степени неразрешимо в радикалах. Знаменита также теорема Абеля о равномерной сходимости рядов.

Для удобства изучения поведения его суммы  $f(x, r)$  при  $r \rightarrow 1$  представим ее в виде интеграла. Заменяя коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  их интегральными выражениями

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots),$$

получим, что

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-x) dt.$$

Но ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t-x)$$

при фиксированном  $r < 1$  и  $x$  сходится равномерно по  $t$ , так как его члены по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n,$$

и, следовательно, может быть почленно проинтегрирован. Тогда может быть почленно проинтегрирован и ряд

$$\frac{f(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n f(t) \cos n(t-x).$$

Отсюда следует, что

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t-x) \right] dt.$$

Величина

$$P_r(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt$$

называется **ядром Пуассона**.

**Лемма 16.4.** Справедливы следующие свойства

$$1) P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}, \quad 0 < r < 1;$$

$$2) P_r(t) > 0, \quad 0 < r < 1;$$

$$3) 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P_r(t) dt.$$

*Доказательство.* Докажем свойство 1). Для этого рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad z = r(\cos t + i \sin t),$$

Так как  $|z| = r < 1$ , то

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} = \frac{1+z}{2(1-z)} = \frac{1+r \cos t + ir \sin t}{2(1-r \cos t - ir \sin t)} = \frac{1-r^2 + 2ri \sin t}{2(1-2r \cos t + r^2)}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos nt + i \sin nt).$$

Поэтому

$$P_r(t) = 2 \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt \right] = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}.$$

Свойство 2) следует из свойства 1), так как при  $0 < r < 1$

$$1-r^2 > 0, \quad 1-2r \cos t + r^2 = (1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2} > 0.$$

Чтобы доказать свойство 3), рассмотрим функцию  $f(x) \equiv 1$ . Ее ряд

Фурье имеет вид  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0$  и, следовательно,  $f(x, r) \equiv 1$ . Поэтому

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt,$$

так как ядро Пуассона – периодическая функция. Второе равенство в свойстве 3) следует из четности ядра Пуассона.  $\square$

Воспользовавшись свойством 1), мы получим:

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-x) + r^2} dt \quad (0 < r < 1),$$

или, в силу периодичности подынтегрального выражения,

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt \quad (0 < r < 1), \quad (16.14)$$

Интеграл в правой части равенства (16.14) называется **интегралом Пуассона**. Он играет важную роль во многих вопросах анализа. Впервые и ряд (16.13) и интеграл (16.14) были рассмотрены Пуассоном задолго до появления теории суммирования рядов, но эти рассуждения были неточными. Точную теорию интеграла Пуассона построил Шварц.

**Теорема 16.5.** Если  $f(x)$  – непрерывная функция периода  $2\pi$ , то  $f(x, r)$  стремится к  $f(x)$  при  $r \rightarrow 1$  равномерно относительно  $x$ .

**Доказательство.** Пользуясь свойствами ядра Пуассона, мы можем написать:

$$\begin{aligned} f(x, r) - f(x) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt = J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

где  $J_1$  – интеграл в пределах от  $-\pi$  до  $-\delta$ ,  $J_2$  – интеграл в пределах от  $-\pi$  до  $\delta$ , а  $J_3$  – интеграл в пределах от  $\delta$  до  $\pi$ .

В силу равномерной непрерывности функций  $f(x)$  на всей оси для произвольно заданного  $\varepsilon > 0$  можно выбрать число  $\delta > 0$  столь малым, чтобы

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (16.15)$$

как только  $|t| < \delta$  для всех  $x$ .

Оценим интеграл  $J_2$ . В силу (16.15) и свойств функции  $P_r(t)$  имеем

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Далее, функция  $f(x)$  ограничена на всей оси, т.е. существует некоторая постоянная  $c > 0$ , такая, что  $|f(x)| \leq c$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} [|f(x+t)| + |f(x)|] \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt \leq \\ &\leq 2c \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} dt \leq 2c \frac{1-r^2}{4r \sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = \\ &= \frac{c}{2} \frac{1-r^2}{r \sin^2 \frac{\delta}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $r \rightarrow 1$ . Поэтому существует такое  $r_0$  ( $0 < r_0 < 1$ ), что при  $r_0 < r < 1$

выполняется неравенство

$$|J_3| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.17)$$

Аналогично,

$$|J_1| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (16.18)$$

Из (16.16) – (16.18) следует, что при  $r_0 < r < 1$

$$|f(x, r) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

и поскольку  $r_0$  выбрано независимым от точки  $x$ , то последнее соотношение означает, что  $f(x, r)$  стремится к  $f(x)$  при  $r \rightarrow 1$  равномерно относительно  $x$ .  $\square$

Справедлива также следующая

**Теорема 16.6.** Ряд Фурье абсолютно интегрируемой функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  суммируется по методу Пуассона-Абеля к этой функции в каждой точке ее непрерывности и к значению  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  в точках разрыва первого рода.

*Доказательство* можно найти в книге [1], гл. VI.

**Пример.** Просуммировать способом степенных множителей ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

*Решение.* Пусть  $0 < r < 1$ . Рассмотрим равномерно сходящийся относительно  $x$  ряд

$$f(x, r) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx$$

и покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx = \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2}.$$



Для этого рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos nx + i \sin nx) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n,$$

где  $z = r(\cos x + i \sin x)$ . Так как  $|z| = r < 1$ , то последний ряд сходится, причем сумма равна  $\frac{1}{1-z}$ . Возвращаясь к переменным  $r, x$ , будем иметь:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos nx + i \sin nx) = \frac{1}{1 - r \cos x - i r \sin x} = \frac{1 - r \cos x + i r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2},$$

откуда немедленно следует требуемая формула. Переходя в ней к пределу при  $r \rightarrow 1$ , получим:

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 1} f(x, r) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} = \frac{\sin x}{2(1 - \cos x)} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

**4. Решение задачи Дирихле для круга.** Интеграл Пуассона может быть использован при решении так называемой **задачи Дирихле**. Напомним, что функция  $u = u(x, y)$  называется **гармонической** в некоторой области, если она непрерывна в этой области вместе со

своими производными  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (16.19)$$

(уравнение Лапласа).

Рассмотрим конечную область  $D$ , ограниченную замкнутым контуром  $L$ . Задача Дирихле для этой области формулируется следующим образом: пусть на контуре  $L$  задана непрерывная функция точки; требуется найти такую непрерывную в замкнутой области  $\bar{D} (= D \cup L)$

и гармоническую внутри нее функцию  $u = u(x, y)$ , которая на контуре совпадала бы с заданной функцией. Мы приведем решение задачи, когда область  $D$  есть круг радиуса 1, описанный вокруг начала координат.

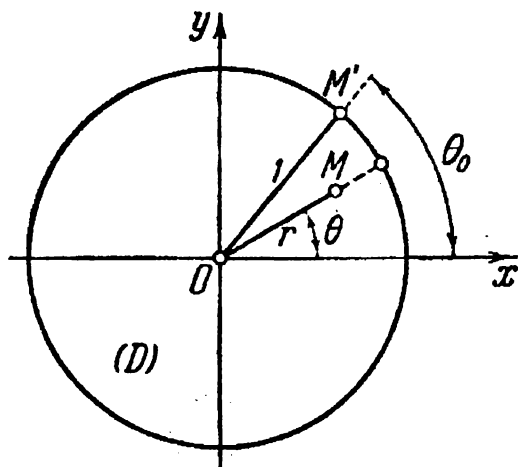


Рис 16.1

Итак, пусть на окружности  $L$  задана некоторая непрерывная функция точки. Если положение точки на окружности определять полярным углом  $\theta$  (рис. 16.1), то это равносильно заданию непрерывной  $2\pi$ -периодической функции  $f(\theta)$ . Перейдем и внутри круга к полярным координатам  $r, \theta$ , заменив уравнение (16.19) соответственно преобразованным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (16.19^*)$$

Нам нужно, таким образом, найти непрерывную при  $r \leq 1$  функцию  $u = u(r, \theta)$ , которая при  $r < 1$  удовлетворяла бы уравнению (16.19\*), а

при  $r=1$  совпадала бы с  $f(\theta)$ .

Возьмем простейшие (не считая постоянной) решения уравнения (16.19\*):

$$r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta \quad (n=1, 2, \dots).$$

Нетрудно непосредственно проверить, что эти функции удовлетворяют уравнению. Умножив их на произвольные множители  $A_n, B_n$  и присоединив постоянный член  $A_0$ , составим ряд

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n,$$

который формально (если допустить возможность почленного дифференцирования) также удовлетворяет уравнению (16.19\*). Наконец, учитывая граничное условие  $u(1, \theta) = f(\theta)$ , получим:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta),$$

откуда заключаем, что  $A_0, A_n, B_n$  суть коэффициенты Фурье функции  $f(\theta)$ :

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = a_n, \quad B_n = b_n.$$

Окончательно приходим к следующему, формальному, решению задачи:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n. \quad (16.20)$$

Нетрудно заметить, что ряд (16.20) представляет ряд Пуассона для функции  $f(\theta)$ , который можно заменить интегралом Пуассона:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-\theta) + r^2} dt.$$

Остается убедиться, что построенная функция действительно удовлетворяет всем требованиям.

Так как коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  ограничены в совокупности, то при  $r \leq r_0 < 1$  ряды, полученные из (16.20) почленным дифференцированием по  $r$  и по  $\theta$  (один или два раза), будут сходиться равномерно как относительно  $r$ , так и относительно  $\theta$ . Поэтому они дадут соответствующие производные функции  $u(r, \theta)$ , и эта функция будет удовлетворять уравнению (16.19\*) внутри круга, т.е. при  $r < 1$ , поскольку ему удовлетворяют по отдельности все члены ряда.

Далее, внутри круга функция  $u(r, \theta)$  непрерывна по совокупности переменных  $(r, \theta)$ ; это следует из равномерной сходимости ряда (16.20) сразу по обоим переменным (при  $r \leq r_0 < 1$ ). Покажем теперь, что функция  $u(r, \theta)$ , при приближении точки  $(r, \theta)$  изнутри круга к точке  $(1, \theta_0)$  на окружности, стремится именно к  $f(\theta_0)$ . Действительно, в силу непрерывности функции  $f(\theta)$ , для произвольного  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что при  $|\theta - \theta_0| < \delta$  будет

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, так как  $u(r, \theta)$  при  $r \rightarrow 1$ ,  $r < 1$ , стремится к  $f(\theta)$  равномерно относительно  $\theta$ , в силу теоремы 16.5, то можно считать  $\delta$  столь малым, что при  $|r - 1| < \delta$  будет

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех  $\theta$ . Поэтому окончательно при  $|r - 1| < \delta$  и  $|\theta - \theta_0| < \delta$  имеем:

$$|u(r, \theta) - f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

что и требовалось доказать.

## § 17. Кратные тригонометрические ряды

Ряды Фурье можно рассматривать и для функций нескольких переменных. Чтобы дать об этом представление, достаточно рассмотреть функции двух переменных.

Функции

$$\left. \begin{aligned} &1, \cos mx, \sin mx, \cos ny, \sin ny, \\ &\cos mx \cos ny, \sin mx \cos ny, \\ &\cos mx \sin ny, \sin mx \sin ny, \\ &(m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

образуют **основную тригонометрическую систему** для случая двух переменных. Каждая из функций имеет период  $2\pi$  по  $x$  и по  $y$ .

Функции системы (17.1) ортогональны в квадрате  $K = (-\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi)$ , и даже в любом квадрате  $K' = (a \leq x \leq a + 2\pi, b \leq y \leq b + 2\pi)$ . Действительно,

$$\iint_K 1 \cdot \cos mx dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = 0$$

и аналогично

$$\iint_K 1 \cdot \sin mx dx dy = \iint_K 1 \cdot \cos ny dx dy = \iint_K 1 \cdot \sin ny dx dy = 0.$$

Далее,

$$\iint_K (\cos mx \cos ny) (\cos rx \cos sy) dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos rx \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos ny \cos sy dy \right) dx = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos rx dx \int_{-\pi}^{\pi} \cos ny \cos sy dy = 0,
\end{aligned}$$

если  $m \neq r$  или  $n \neq s$ . Аналогично доказывается ортогональность любой пары различных функций системы (17.1).

Пусть для всех вещественных значений  $x$  и  $y$  задана функция  $f(x, y)$ , имеющая период  $2\pi$  как по  $x$ , так и по  $y$ , и интегрируемая (в собственном или несобственном смысле) в квадрате  $K$ . Тогда тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x, y)$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
f(x, y) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} [a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \cos mx \sin ny + \\
+ c_{m,n} \sin mx \cos ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny], \quad (17.2)
\end{aligned}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_{0,0} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_K f(x, y) dx dy,$$

$$\begin{aligned}
a_{m,0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_K f(x, y) \cos mx dx dy; \quad a_{0,n} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_K f(x, y) \cos ny dx dy; \\
(m = 1, 2, 3, \dots) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{0,n} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_K f(x, y) \sin ny dx dy; \quad c_{m,0} = \frac{1}{2\pi^2} \iint_K f(x, y) \sin mx dx dy; \\
(n = 1, 2, 3, \dots) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}$$

и, наконец, при  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

$$\left. \begin{aligned} a_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx dy, \\ b_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x, y) \cos mx \sin ny \, dx dy, \\ c_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x, y) \sin mx \cos ny \, dx dy, \\ d_{m,n} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Впрочем, обычно ряд (17.2) записывают в виде

$$f(x, y) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} [a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \cos mx \sin ny + c_{m,n} \sin mx \cos ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny], \quad (17.2^*)$$

где

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{при } m = n = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } m > 0, n = 0 \text{ или } m = 0, n > 0, \\ 1, & \text{при } m > 0, n > 0, \end{cases}$$

а все коэффициенты  $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}$  вычисляются по формулам (17.3).

В комплексной форме ряд Фурье записывается более компактно:

$$f(x, y) \sim \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{i(mx+ny)},$$

где

$$c_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_K f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

В силу полноты системы (17.1), для функции  $f(x, y)$  справедлива формула Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_K f^2(x, y) dx dy = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} [a_{m,n}^2 + b_{m,n}^2 + c_{m,n}^2 + d_{m,n}^2].$$

Вопрос о сходимости ряда (17.2) [или (17.2\*)] решается путем исследования его частной суммы  $S_{m,n}(x, y)$ , для которой можно получить интегральное представление вроде интеграла Дирихле:

$$S_{m,n}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x+u, y+v) \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)u \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)v}{4 \sin \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}} du dv.$$

Справедлива

**Теорема 17.1.** Пусть  $f(x, y)$  задана в  $K$ , непрерывна и имеет ограниченные частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Тогда в каждой внутренней точке квадрата, в некоторой окрестности которой существует непрерывная смешанная производная  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , ряд Фурье сходится и имеет своей суммой функцию  $f(x, y)$ . Если  $f(x, y)$  имеет период  $2\pi$  по  $x$  и по  $y$  и непрерывна во всей плоскости, причем в  $K$  обладает непрерывными частными производными  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , то ряд



Фурье сходится к  $f(x, y)$  всюду.

Замечание 1. Напомним, что равенство

$$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} \left[ a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \cos mx \sin ny + \right. \\ \left. + c_{m,n} \sin mx \cos ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny \right]$$

означает, что

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} S_{m,n}(x, y) = f(x, y),$$

или точнее: для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N$  такое, что для  $m \geq N, n \geq N$  справедливо неравенство

$$|f(x, y) - S_{m,n}(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Часто возникает задача о разложении в двойной тригонометрический ряд функции  $f(x, y)$ , заданной в прямоугольнике  $R = (-l \leq x \leq l; -h \leq y \leq h)$ , или функции  $f(x, y)$ , заданной для всех  $x$  и  $y$ , с периодом  $2l$  по  $x$  и периодом  $2h$  по  $y$ . Эта задача сводится к рассмотренному случаю с помощью замены  $u = \frac{\pi x}{l}, v = \frac{\pi y}{h}$ , так как тогда функция

$$f\left(\frac{lu}{\pi}, \frac{hv}{\pi}\right) = \varphi(u, v)$$

будет иметь период  $2\pi$  по  $u$  и по  $v$ .

Если ряд Фурье функции  $\varphi(u, v)$  есть

$$\varphi(u, v) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} \left[ a_{m,n} \cos mu \cos nv + b_{m,n} \cos mu \sin nv + \right. \\ \left. + c_{m,n} \sin mu \cos nv + d_{m,n} \sin mu \sin nv \right],$$

то, возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$ , получим:

$$f(x, y) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} \left[ a_{m,n} \cos \frac{\pi m x}{l} \cos \frac{\pi n y}{h} + b_{m,n} \cos \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n y}{h} + c_{m,n} \sin \frac{\pi m x}{l} \cos \frac{\pi n y}{h} + d_{m,n} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{\pi n y}{h} \right],$$

где

$$a_{m,n} = \frac{1}{lh} \iint_R f(x, y) \cos \frac{\pi m x}{l} \cos \frac{\pi n y}{h} dx dy$$

и т.д.

Комплексная форма в этом случае имеет вид

$$f(x, y) \sim \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{i\pi \left( \frac{mx}{l} + \frac{ny}{h} \right)},$$

где

$$c_{m,n} = \frac{1}{4lh} \iint_K f(x, y) e^{-i\pi \left( \frac{mx}{l} + \frac{ny}{h} \right)} dx dy.$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

**Пример.** Разложить в двойной ряд Фурье функцию  $f(x, y) = xy$  для  $-\pi < x < \pi$ ,  $-\pi < y < \pi$ .

*Решение.* Функция  $f(x, y)$ , очевидно, непрерывна при

$-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $-\pi \leq y \leq \pi$ , а ее частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x} = y$  и  $\frac{\partial f}{\partial y} = x$  ограничены при этих  $x$  и  $y$ . Далее, при  $-\pi < x < \pi$ ,  $-\pi < y < \pi$  сме-

шанная производная  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$  непрерывна. Поэтому по теореме 17.1

функция  $f(x, y)$  разлагается в ряд Фурье, который сходится к ней всюду в области  $-\pi < x < \pi$ ,  $-\pi < y < \pi$ .

Вычислим коэффициенты Фурье. По формулам (17.3) имеем:

$$a_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x, y) \cos mx \cos ny dx dy = \frac{1}{\pi^2} \iint_K xy \cos mx \cos ny dx dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx dx \int_{-\pi}^{\pi} y \cos ny dy = 0,$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x, y) \cos mx \sin ny dx dy = \frac{1}{\pi^2} \iint_K xy \cos mx \sin ny dx dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx dx \int_{-\pi}^{\pi} y \sin ny dy = 0,$$

$$c_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x, y) \sin mx \cos ny dx dy = \frac{1}{\pi^2} \iint_K xy \sin mx \cos ny dx dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx dx \int_{-\pi}^{\pi} y \cos ny dy = 0,$$

$$d_{m,n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K f(x, y) \sin mx \sin ny dx dy = \frac{1}{\pi^2} \iint_K xy \sin mx \sin ny dx dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx dx \int_{-\pi}^{\pi} y \sin ny dy = (-1)^{m+n} \frac{4}{mn}.$$

Поэтому

$$xy = 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\sin mx \sin ny}{mn} \quad (-\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi).$$

## § 18. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье

Пусть функция  $f(x)$ , заданная для всех вещественных  $x$ , является кусочно-дифференцируемой (непрерывной или разрывной) на каждом конечном отрезке  $[-l, l]$ . Тогда на каждом таком отрезке  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) \quad (18.1)$$

(в точках разрыва вместо  $f(x)$  нужно писать  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ ), где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n u}{l} du \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{\pi n u}{l} du \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если в (18.1) вместо  $a_n$  и  $b_n$  подставить их интегральные выражения, то получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u-x) du.$$

Предположим теперь, что  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси, т.е. существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Тогда при  $l \rightarrow \infty$  ( $x$  — фиксировано) получим:

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{\pi n}{l} (u-x) du. \quad (18.2)$$

Посмотрим, во что перейдет в пределе сумма справа. Положим

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \dots,$$

$$\Delta \lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда интересующая нас сумма примет вид:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \lambda_n \int_{-l}^l f(u) \cos \lambda_n (u-x) du.$$

Это напоминает интегральную сумму для функции

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda (u-x) du$$

от  $\lambda$  в промежутке  $[0, +\infty]$ . Поэтому переходя к пределу при  $l \rightarrow \infty$ , из (18.2) получим:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda (u-x) du. \quad (18.3)$$

Наше рассуждение не является строгим, но ниже мы покажем, что формула (18.3), действительно, имеет место при некоторых условиях, наложенных на  $f(x)$ .

Интеграл справа в (18.3) называется **интегралом Фурье**, а формула (18.3) – **интегральной формулой Фурье**.

Воспользовавшись формулой для косинуса разности, вместо (18.3) получим формулу:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du.$$

Здесь явно обнаруживается сходство с рядом Фурье: сумма заменяется интегралом, а дискретный параметр  $n$  – непрерывно изменяющимся параметром  $\lambda$ . Коэффициенты  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  напоминают коэффициенты Фурье.

## § 19. Сведения о несобственных интегралах, зависящих от параметра

Предположим, что интеграл

$$\int_a^x F(x, \lambda) dx \quad (19.1)$$

сходится для  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ . Назовем его равномерно сходящимся для  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует число  $L$  такое, что для всех  $l \geq L$

$$\left| \int_l^x F(x, \lambda) dx \right| \leq \varepsilon,$$

каково бы ни было  $\lambda$ ,  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ .

Справедливо следующее утверждение: для того чтобы интеграл (19.1) равномерно сходилсЯ, необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности чисел

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty,$$

равномерно сходилсЯ для  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$  ряд

$$\int_a^x F(x, \lambda) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x, \lambda) dx.$$

Из этого утверждения следует

**Теорема 19.1.** Если  $F(x, \lambda)$  непрерывна как функция двух переменных (или имеет разрывы для конечного числа значений  $x$  на каждом конечном интервале, оставаясь интегрируемой по  $x$  и непрерывной по  $\lambda$ ) и интеграл (19.1) сходится равномерно для  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ , то этот интеграл представляет собой непрерывную функцию от  $\lambda$ .

**Теорема 19.2.** В условиях теоремы 19.1

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\lambda \int_a^{\infty} F(x, \lambda) dx = \int_a^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} F(x, \lambda) d\lambda.$$

**Теорема 19.3.** Если  $F(x, \lambda)$  непрерывна как функция двух переменных и имеет непрерывную частную производную  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ , причем интегралы

$$\int_a^{\infty} F(x, \lambda) dx, \int_a^{\infty} \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx$$

существуют и второй из них равномерно сходится для  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ , то

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_a^{\infty} F(x, \lambda) dx = \int_a^{\infty} \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx \quad (\alpha \leq \lambda \leq \beta).$$

**Теорема 19.4.** Если функция  $F(x, \lambda)$  удовлетворяет условиям теоремы 19.1 и для  $\alpha \leq \lambda \leq \beta$

$$|F(x, \lambda)| \leq f(x),$$

причем интеграл

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

существует, то интеграл (19.1) сходится равномерно.

Доказательство вышеприведенных утверждений можно найти в книге [1], гл. VII.

Вместо интеграла (19.1) можно рассматривать интегралы вида

$$\int_{-\infty}^b F(x, \lambda) dx, \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \lambda) dx.$$

Для них тоже имеют место указанные теоремы.

Для несобственных интегралов справедливо обобщение теоремы 4.1 (Римана).

**Лемма 19.5.** Если функция  $g(t)$  абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке  $[a, +\infty)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} g(t) \sin pt dt = 0$$

(и аналогично  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} g(t) \cos pt dt = 0$ ).

*Доказательство* аналогично доказательству теоремы 4.1 (для случая когда функция  $g(t)$  имеет особую точку).

Замечание 1. Вместо интеграла по промежутку  $[a, +\infty)$  можно рассматривать интегралы по промежуткам  $(-\infty, a]$  или  $(-\infty, +\infty)$ .

**Лемма 19.6.** Если в точке  $x$  для абсолютно интегрируемой на всей оси функции  $f(x)$  существуют правая и левая производные, то

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin lt}{t} dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

*Доказательство.* Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и выберем  $\delta > 0$  столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция  $\frac{f(x+t)}{t}$  абсолютно интегрируема для  $-\infty < t \leq -\delta$  и

$\delta \leq t < +\infty$ . Поэтому по лемме 19.5

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin lt}{t} dt = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} f(x+t) \frac{\sin lt}{t} dt = 0. \quad (19.2)$$

Справедливо равенство:



$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin mt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

где  $m = n + \frac{1}{2}$ ,  $n$  – целое (это следует из признака Дини-Липшица сходимости рядов Фурье). Это равенство можно переписать в виде

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin mt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad (19.3)$$

так как в силу абсолютной интегрируемости функции  $\frac{f(x+t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$  на от-

резках  $[-\pi, -\delta]$ ,  $[\delta, \pi]$  интегралы по этим отрезкам стремятся к нулю при  $m \rightarrow \infty$  (см. теорему 4.1).

Заметим, что интеграл слева (19.3) отличается от интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin mt}{t} dt$$

на величину

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \left[ \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mtdt, \quad (19.4)$$

причем функция в квадратных скобках непрерывна, если при  $t=0$  положить ее равной нулю. По теореме 4.1 интеграл (19.4) стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Поэтому вместо (19.3) можно записать:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin mt}{t} dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (19.5)$$

Пусть  $m \leq l \leq m+1$ . Тогда  $l = m + \theta$ ,  $0 \leq \theta < 1$ . По теореме Лагранжа о конечных приращениях, получим:

$$\frac{\sin lt - \sin mt}{t} = (l - m) \cos ht = \theta \cos ht,$$

где  $m \leq h \leq l$ . Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin mt}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin lt}{t} dt \right| = \\ & = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \theta \cos htdt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (19.6),$$

при любом  $l$ . Если  $l$  велико, то велико и  $m$ , следовательно, для достаточно больших  $l$  в силу (19.5) получаем:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin mt}{t} dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сопоставляя это неравенство с (19.6), будем иметь

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{\sin lt}{t} dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| < \varepsilon$$

для всех достаточно больших  $l$ . В силу (19.2) вместо последнего неравенства можем написать:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin lt}{t} dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

## § 20. Доказательство интегральной формулы Фурье

Пусть  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси. По определению несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du = \\ = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du, \end{aligned} \quad (20.1)$$

т.е. существование интеграла эквивалентно существованию предела справа.

Но интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du$$

сходится равномерно для  $-\infty < \lambda < \infty$ , так как

$$|f(u) \cos \lambda(u-x)| \leq |f(u)|,$$

а  $f(u)$  абсолютно интегрируема на всей оси (см. теорему 19.4). Поэтому по теореме 19.2

$$\begin{aligned} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du &= \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^l f(u) \cos \lambda(u-x) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin l(u-x)}{u-x} du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin lt}{t} dt. \end{aligned}$$

В силу (20.1)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin lt}{t} dt.$$

Если в точке  $x$  функция  $f(x)$  имеет правую и левую производные, то по лемме 19.6 предел в правой части существует и равен

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad \text{Следовательно, существует интеграл слева и}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (20.2)$$

В точках непрерывности  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = f(x)$ .

Таким образом, мы доказали, что если  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси, то интегральная формула Фурье имеет место в каждой точке  $x$ , в которой  $f(x)$  имеет правую и левую производные.

В частности, если кусочно-дифференцируемая на каждом конечном отрезке функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси, то интегральная формула Фурье имеет место для всех  $x$ .

## § 21. Признаки сходимости интеграла Фурье

В §§ 18, 20 мы исходили из предположения, что заданная абсолютно интегрируемая на всей оси функция  $f(x)$  является кусочно-дифференцируемой. В этих условиях мы доказали справедливость равенства (18.3) (в точках разрыва  $f(x)$  следует писать  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ ).

В общем случае, когда нам известно лишь то, что функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси, мы не можем поставить знак равенства. Мы пишем (сравните с рядами Фурье):

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du, \quad (21.1)$$

подчеркивая этим, что функции  $f(x)$  соответствует ее интеграл Фурье.

Как и в теории рядов Фурье, мы сталкиваемся здесь с проблемой: указать условия на функцию  $f(x)$ , при выполнении которых интеграл

Фурье сходится к  $f(x)$  или к  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ .

Сформулируем достаточные признаки сходимости интеграла Фурье.

**Признак Дини.** Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $(-\infty, +\infty)$  и в точке  $x_0 \in (-\infty, +\infty)$  существуют конечные односторонние пределы  $f(x_0 \pm 0)$ . Если в точке  $x_0$  выполнены условия Дини, т.е. существует  $h > 0$ , такое, что несобственные интегралы

$$\int_0^h \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} dt \quad \text{и} \quad \int_0^h \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{t} dt$$

сходятся, то интеграл Фурье (21.1) для функции  $f(x)$  сходится в точке  $x_0$  к  $f(x_0)$ , если функция  $f(x)$  непрерывна в  $x_0$ , и к  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ , если  $x_0$  – точка разрыва первого рода функции  $f(x)$ .

В частности, из признака Дини следуют утверждения §§ 18, 20:

Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $(-\infty, +\infty)$  и кусочно-непрерывна на любом конечном отрезке, и для любого  $x \in (-\infty, +\infty)$  либо существует конечная производная функции  $f(x)$ , либо существуют конечные односторонние производные, то интеграл Фурье (21.1) для функции  $f(x)$  сходится всюду на  $(-\infty, +\infty)$  к функции

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (\text{к } f(x), \text{ если } f(x) \text{ непрерывна в точке } x).$$

В частности, если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в про-

межутке  $(-\infty, +\infty)$  и непрерывно дифференцируема в нем, то интеграл Фурье (21.1) для функции  $f(x)$  сходится к  $f(x)$  всюду на  $(-\infty, +\infty)$ .

Часто удобнее применять другой признак сходимости.

**Признак Дирихле-Жордана.** Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $(-\infty, +\infty)$  и в промежутке  $[x_0 - h, x_0 + h]$ ,  $h > 0$ , функция имеет ограниченное изменение. Тогда интеграл Фурье функции  $f(x)$  сходится в точке  $x_0$  к  $f(x_0)$ , если  $f(x)$  непрерывна в  $x_0$ , и к  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ , если  $x_0$  – точка разрыва первого рода  $f(x)$ .

Доказательство приведенных утверждений можно найти в книге [2], т. 3, гл. XIX.

**Пример.** Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty, \\ 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

и построить его график.

**Решение.** Функция  $f(x)$  непрерывна всюду на вещественной прямой, кроме точек  $x = 0$ ,  $x = 1$ , где она имеет разрывы первого рода. Далее, функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси. По определению интеграл Фурье функции  $f(x)$  равен:

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \lambda u du = \frac{\sin \lambda}{\pi \lambda},$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \lambda u du = \frac{1 - \cos \lambda}{\pi \lambda}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} \left( \frac{\cos \lambda x \sin \lambda}{\pi \lambda} + \frac{\sin \lambda x (1 - \cos \lambda)}{\pi \lambda} \right) d\lambda.$$

Функция  $f(x)$  кусочно-монотонна и равна нулю вне отрезка  $[0, 1]$ , поэтому она имеет ограниченное изменение на каждом конечном отрезке. Следовательно, согласно признаку Дирихле-Жордана ее интеграл Фурье сходится всюду к функции

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty, \quad -\infty < x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = 1, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 21.1.

## § 22. Различные виды интегральной формулы Фурье

Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси и выполнены достаточные условия применимости формулы Фурье (см. § 21). Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \lambda(u - x) du.$$

Этот интеграл равномерно сходится для  $-\infty < \lambda < \infty$ , так как

$$|f(u) \sin \lambda(u - x)| \leq |f(u)|,$$

(см. теорему 19.4), и, следовательно, представляет собой непрерывную нечетную функцию от  $\lambda$ . Несобственный интеграл от  $-\infty$  до  $+\infty$  для этой функции может не существовать, но он существует в смысле *главного значения* и

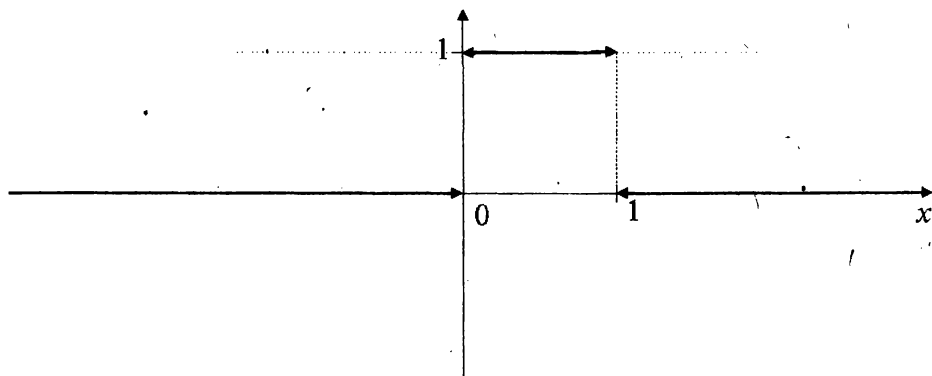


График  $f(x)$

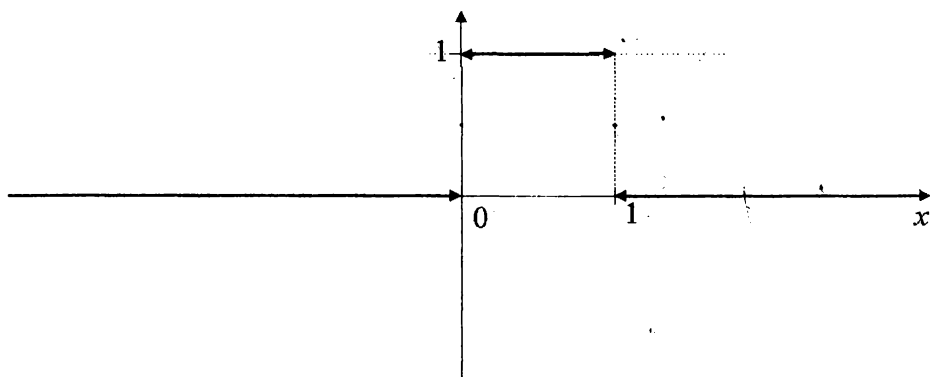


График  $g(x)$



$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda(u-x) du \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} V.p. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda(u-x) du = 0. \quad (22.1)$$

С другой стороны, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du$$

представляет собой четную функцию от  $\lambda$ . Поэтому формулу (18.3) можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du.$$

Учитывая (22.1), приходим к соотношению

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [\cos \lambda(u-x) + i \sin \lambda(u-x)] du = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda(u-x)} du, \quad (22.2)$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Мы получили, таким образом, **комплексную форму интеграла Фурье**.

Перепишем теперь формулу (18.3) в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du \right) d\lambda + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du \right) d\lambda. \quad (22.3)$$

Если  $f(u)$  — четная функция, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du = 2 \int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du = 0,$$

и из равенства (22.3) мы получим формулу

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x \left( \int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du \right) d\lambda. \quad (22.4)$$

Аналогично, если  $f(u)$  – нечетная функция, то получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x \left( \int_0^{\infty} f(u) \sin \lambda u du \right) d\lambda. \quad (22.5)$$

Замечание 1. Напомним, что в выражениях (22.2)–(22.5) мы подразумевали функцию  $f(x)$  непрерывной в точке  $x$ . Если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x$  разрыв первого рода, то вместо  $f(x)$  в (22.2) – (22.5)

следует писать  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ .

Если функция  $f(u)$  задана лишь в промежутке  $[0, +\infty)$ , то с помощью формулы (22.4) ее можно распространить на всю ось четным образом, а с помощью формулы (22.5) – нечетным образом. Таким образом, для положительных значений  $x$  применимы обе формулы, а для отрицательных  $x$  они дадут разные значения.

Если функция  $f(u)$  непрерывна в точке  $x = 0$ , то формула (22.4) всегда справедлива в этой точке, а формула (22.5) справедлива лишь тогда, когда  $f(0) = 0$  (так как при нечетном продолжении функции

$$\frac{f(+0) + f(-0)}{2} = 0).$$

**Пример.** Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

а) продолжив ее четным образом, б) продолжив ее нечетным образом на всю прямую.

*Решение.* а) Если продолжение функции четное:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

то имеем

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x \left( \int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du \right) d\lambda = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^1 \cos \lambda u du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x \sin \lambda}{\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Продолженная функция имеет разрывы первого рода в точках  $x = \pm 1$  и непрерывна в остальных точках. Далее, она имеет ограниченное изменение на каждом конечном отрезке. Поэтому по признаку Дирихле-Жордана сходимости интеграла Фурье

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x \sin \lambda}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1. \end{cases}$$

б) Если продолжение функции нечетное:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ -1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

то имеем

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x \left( \int_0^{\infty} f(u) \sin \lambda u du \right) d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^1 \sin \lambda u du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x (1 - \cos \lambda)}{\lambda} d\lambda.$$

Продолженная функция имеет разрывы первого рода в точках  $x = \pm 1$ ,  $x = 0$  и непрерывна в остальных точках. По признаку Дирихле-Жордана сходимости интеграла Фурье

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x (1 - \cos \lambda)}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & -1 < x < 0, \\ -\frac{1}{2}, & x = -1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

### § 23. Преобразование Фурье

Предположим, что интегральная формула Фурье (18.3) имеет место для всех  $x \in (-\infty, +\infty)$ , кроме, быть может, конечного числа точек. Представим эту формулу в виде суперпозиции двух формул:

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda u} du \quad (23.1)$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (23.2)$$

Функция  $F(\lambda)$  называется **преобразованием Фурье** функции  $f(x)$ . Формула (23.2), выражающая  $f(x)$  через ее преобразование Фурье, называется **обратным преобразованием Фурье** для функ-

ции  $F(\lambda)$ .

Нужно отметить, что при всем внешнем сходстве формул (23.1) и (23.2), они, по существу, различны: формула (23.1) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой на всей оси функции  $f(x)$ ; интеграл в формуле (23.2) существует, вообще говоря, лишь в смысле главного значения. Кроме того, равенство (23.1) – это определение функции  $F(\lambda)$ , а равенство (23.2) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $F(\lambda)$ , решение которого дается формулой (23.1).

Рассмотрим два частных случая. Если для функции  $f(x)$  справедлива формула (22.4), то ее можно представить как суперпозицию двух формул:

$$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x f(u) \cos \lambda u du$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x F_c(\lambda) \cos x \lambda d\lambda.$$

Аналогично, формула (22.5) может быть разложена на две:

$$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x f(u) \sin \lambda u du$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x F_s(\lambda) \sin x \lambda d\lambda.$$

Функции  $F_c(\lambda)$  и  $F_s(\lambda)$  называются; соответственно, **косинус- и синус-преобразованием Фурье**. Как видим, функция  $f(x)$  получается из  $F_c(\lambda)$  [ $F_s(\lambda)$ ] точно так же, как и  $F_c(\lambda)$  [ $F_s(\lambda)$ ] из  $f(x)$ .

Иначе говоря, функции  $f(x)$  и  $F_c(\lambda)$  [ $F_s(\lambda)$ ] являются взаимными косинус-(синус-) преобразованиями.

Отметим, что в случае четной функции  $f(x)$  имеем:

$$F(\lambda) = F_c(\lambda)$$

(на значения  $\lambda < 0$  функция  $F_c(\lambda)$  продолжается четным образом), а в случае нечетной  $f(x)$ :

$$F(\lambda) = iF_s(\lambda)$$

(на значения  $\lambda < 0$  функция  $F_s(\lambda)$  продолжается нечетным образом).

Так как всякая функция  $f(x)$  разлагается на сумму четной и нечетной функций:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

то

$$F(\lambda) = G_c(\lambda) + iH_s(\lambda),$$

где  $G_c(\lambda)$  обозначает косинус-преобразование для функции  $g(x)$ , а  $H_s(\lambda)$  – синус-преобразование для функции  $h(x)$ .

Отметим некоторые **свойства преобразования Фурье**

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{ixu} du. \quad (23.3)$$

1. Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , то функция  $F(x)$  непрерывна для всех  $x$  и стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Действительно, непрерывность следует из равномерной сходимости интеграла (относительно  $x$ ), так как он мажорируется сходящимся

интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| du,$$

не содержащим  $x$ .

Далее, в силу леммы 19.5 (см. замечание 1)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos x u du + i \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin x u du \right] = 0.$$

2. Если функция  $x^n f(x)$  ( $n$  - целое, неотрицательное число) абсолютно интегрируема в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , то функция  $F(x)$  имеет  $n$  производных, причем

$$F^{(k)}(x) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) u^k e^{ixu} du \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (23.4)$$

и все эти производные стремятся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ .

В самом деле, последовательно дифференцируя интеграл (23.3) по параметру  $x$  под знаком интеграла, получим формулу (23.4). Дифференцирование здесь законно, поскольку интеграл в (23.4) сходится равномерно относительно  $x$ , так как он мажорируется сходящимся интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u) u^k| du.$$

Стремление к нулю производных  $F^{(k)}(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  следует из леммы 19.5.

3. Если  $f(x)$  непрерывна и стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , а  $f'(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(u) e^{ixu} du = \frac{x}{i} F(x).$$

**3'.** Если  $f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$  стремятся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , а  $f^{(n)}(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(u) e^{ixu} du = \left(\frac{x}{i}\right)^n F(x).$$

**4.** Если  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $(-\infty, +\infty)$ , а

$$\int_0^x f(u) du \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \text{ то}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^u f(t) dt \right) e^{ixu} du = \frac{i}{x} F(x).$$

Три последние формулы доказываются интегрированием по частям.

**Пример 1.** Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

*Решение.* Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей прямой, поэтому для нее имеет смысл формула (23.1):

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{i\lambda u} du = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\lambda u}}{i\lambda} \Big|_{-a}^a, & \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2a, & \lambda = 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2a, & \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda a}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} a, & \lambda = 0. \end{cases} \end{aligned}$$



**Пример 2.** Найти косинус- и синус-преобразование Фурье функции  $f(x) = e^{-\alpha x}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 0$ .

*Решение.* Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в промежутке  $[0, +\infty)$ , поэтому по определению косинус-преобразования Фурье имеем:

$$\begin{aligned} F_c(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \cos \lambda u du = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \left[ \frac{1}{\lambda} e^{-\alpha u} \sin \lambda u \right]_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \sin \lambda u du \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \left[ -\frac{\alpha}{\lambda^2} e^{-\alpha u} \cos \lambda u \right]_0^{+\infty} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \cos \lambda u du \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} F_c(\lambda), \\ \Rightarrow F_c(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}. \end{aligned}$$

а по определению синус-преобразования Фурье имеем:

$$\begin{aligned} F_s(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \sin \lambda u du = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\alpha u} \cos \lambda u \right]_0^{+\infty} - \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u} \cos \lambda u du \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2}. \end{aligned}$$

## ГЛАВА 2. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОБЩИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

### § 1. Весовая функция. Классы $\tilde{R}_{p(x)}([a, b])$ и $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$

Пусть на конечном отрезке  $[a, b]$  задана неотрицательная функция  $f(x)$ , непрерывная в интервале  $(a, b)$  всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, в окрестности которых она ограничена либо график ее имеет вертикальные асимптоты, и интегрируемая на  $[a, b]$  (в собственном или несобственном смысле). Мы будем называть ее **весовой функцией** или **весом**. Условимся рассматривать только такие веса  $p(x)$ , которые обращаются в нуль не более чем в конечном числе точек. Для каждой весовой функции рассмотрим два класса функций, заданных на  $[a, b]$ : **класс**  $\tilde{R}_{p(x)}([a, b])$  функций  $f(x)$ , таких, что произведение  $p(x)f(x)$  интегрируемо (в собственном или несобственном смысле), и класс  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  функций  $f(x)$ , таких, что  $f(x)$  и  $f^2(x)$  принадлежат  $\tilde{R}_{p(x)}([a, b])$ . В случае, когда  $p(x) \equiv 1$ , мы будем обозначать эти классы соответственно  $\tilde{R}([a, b])$  и  $\tilde{R}^2([a, b])$ .

Замечание. Мы предполагаем, что функция  $f(x)$  имеет не более чем конечное число точек разрыва.

Отметим, что множества  $\tilde{R}_{p(x)}([a, b])$  и  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  частично пересекаются. Действительно, всякая ограниченная функция из  $\tilde{R}_{p(x)}([a, b])$  принадлежит  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Это не всегда так для неограниченных интегрируемых функций. Например, функция

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in \tilde{R}([0, 1])$ , но интеграл  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  не существует. Обратно, если

$f^2(x) \in \tilde{R}_{p(x)}([a, b])$ , то, вообще говоря, откуда не следует, что

$f(x) \in \tilde{R}_{p(x)}([a, b])$ , например,  $f(x) = \frac{1}{2} - D(x)$ , где

$D(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рационально}, \\ 0, & x - \text{иррационально} \end{cases}$  — функция Дирихле, на  $[0, 1]$  с

$$p(x) \equiv 1.$$

Пусть  $f(x), g(x) \in \tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Заметим, что из элементарного неравенства

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$$

следует, что  $|f(x)g(x)| \in \tilde{R}_{p(x)}([a, b])$ . В частности, если

$f(x) \in \tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ , то  $|f(x)| \in \tilde{R}_{p(x)}([a, b])$ .

Далее, из тождества

$$(f(x) \pm g(x))^2 = f^2(x) \pm 2f(x)g(x) + g^2(x)$$

следует, что сумма и разность двух функций класса  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  входят в этот класс. Нетрудно убедиться, что если  $f(x) \in \tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ , то и все функции вида  $cf(x)$ , где  $c$  — постоянная, принадлежат  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Таким образом, множество  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  представляет собой линейное пространство.

**Лемма 1.1.** Если  $f(x), g(x) \in \tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ , то справедливы неравенства:

$$\left[ \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b p(x) f^2(x) dx \int_a^b p(x) g^2(x) dx \quad (1.1)$$

и

$$\sqrt{\int_a^b p(x) [f(x) + g(x)]^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b p(x) g^2(x) dx}. \quad (1.2)$$

*Доказательство.* Для произвольного постоянного  $\lambda$  рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x) [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx = \\ & = \int_a^b p(x) f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx + \lambda^2 \int_a^b p(x) g^2(x) dx \geq 0 \end{aligned}$$

и положим

$$\int_a^b p(x) f^2(x) dx = A, \quad \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx = B, \quad \int_a^b p(x) g^2(x) dx = C.$$

Тогда

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 \geq 0$$

при любом  $\lambda$ . Следовательно, график квадратного трехчлена

$$\varphi(\lambda) = A + 2B\lambda + C\lambda^2,$$

представляющий собой параболу, расположен над осью  $O\lambda$  или касается ее. Поэтому  $\varphi(\lambda)$  не может иметь двух различных действительных корней и для дискриминанта трехчлена выполняется неравенство

$$B^2 - AC \leq 0 \quad \text{или} \quad B^2 \leq AC.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, получим неравенство (1.1). Перепишав его в виде

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b p(x) g^2(x) dx}.$$

удвоив и прибавив к обеим частям  $\int_a^b p(x) f^2(x) dx + \int_a^b p(x) g^2(x) dx$ ,

мы приходим к неравенству

$$\int_a^b p(x) [f(x) + g(x)]^2 dx \leq \left[ \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b p(x) g^2(x) dx} \right]^2,$$

равносильному (1.2).  $\square$

Неравенство (1.1) называется **неравенством Буняковского**<sup>1</sup>, а (1.2) – **неравенством Коши**<sup>2</sup>.

## § 2. Ортогональные системы

Интеграл  $\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$  определен для любых двух функций из  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Его можно рассматривать как **скалярное произведение** в  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$$

и ввести соответствующую **норму**:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx}.$$

<sup>1</sup> В. Я. Буняковский (1804-1889) – русский математик. Большинство его результатов относятся к теории вероятностей и теории чисел.

<sup>2</sup> О. Коши (1780-1856) – французский математик, основатель теории функций комплексного переменного. Впервые определил понятие предела.

Величина  $\|f\|$  обладает следующими свойствами:

1.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ;
2.  $\|cf\| = |c| \|f\|$  для любой постоянной  $c$ ;
3.  $\|f\| \geq 0$ .

Для того чтобы  $\|f\|$  удовлетворяла всем требованиям, предъявляемым в определении нормы линейного пространства, нужно, чтобы выполнялось еще одно условие:

4.  $\|f\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \equiv 0$ .

Мы знаем, что если  $\|f\| = 0$ , то по свойствам интеграла Римана  $p(x)f^2(x) = 0$  в точках непрерывности функций  $p(x)$  и  $f(x)$ . Известно также, что интегралы от двух функций, различающихся лишь в конечном числе точек, совпадают (опять же по свойствам интеграла Римана). Число нулей функции  $p(x)$  и число точек разрыва функций  $p(x)$  и  $f(x)$  конечно. Следовательно,  $f(x) = 0$  всюду на  $[a, b]$ , кроме, может быть, конечного числа точек. Поэтому если считать функции, различающиеся лишь в конечном числе точек, за один элемент пространства  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ , то величина  $\|f\|$ , действительно, задает норму в этом пространстве.

В силу принятого соглашения запись " $f(x) \equiv g(x)$ " теперь означает, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  различаются не более чем в конечном числе точек.

**Определение.** Две функции  $f(x), g(x) \in \tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  ортогональны по весу  $p(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx = 0.$$

Если  $p(x) \equiv 1$ , то говорят просто, что  $f(x)$  и  $g(x)$  **ортogonalны на отрезке**  $[a, b]$ .

Рассмотрим систему функций  $\{\varphi_n(x)\}$ , определенных на отрезке  $[a, b]$  и принадлежащих классу  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Если функции этой системы попарно ортогональны на  $[a, b]$  по весу  $p(x)$ :

$$\int_a^b p(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad (n, m = 0, 1, \dots; n \neq m),$$

то она называется **ортogonalной системой веса**  $p(x)$ . Если  $p(x) \equiv 1$ , то о весе не упоминают. Будем также предполагать, что

$$\int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx = \|\varphi_n\|^2 > 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Если функции ортогональной системы (веса  $p(x)$ ) удовлетворяют условию  $\|\varphi_n\| = 1$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), то такая система называется **ортонормированной**.

Всякую ортогональную систему можно **нормировать**. Если система  $\{\varphi_n(x)\}$  ортогональна, то система

$$\frac{\varphi_0(x)}{\|\varphi_0\|}, \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|}, \dots, \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}, \dots$$

будет уже ортонормированной. Действительно,

$$\frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx = \frac{\|\varphi_n\|^2}{\|\varphi_n\|^2} = 1 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

**Пример 1.** Мы уже имели дело с ортогональными системами веса  $p(x) \equiv 1$ . Это основная тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots,$$

ортогональная на любом отрезке длины  $2\pi$ , и общая тригонометрическая система

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{\pi nx}{l}, \sin \frac{\pi nx}{l}, \dots,$$

ортогональная на любом отрезке длины  $2l$ .

Примерами ортогональных систем могут также служить система

$$1, \cos x, \dots, \cos nx, \dots$$

и система

$$\sin x, \dots, \sin nx, \dots$$

на отрезке длины  $\pi$ .

Пользуясь определением, из этих систем легко получить ортонормированные системы. Например, в первом случае это будет система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

**Пример 2.** Пусть  $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \dots$  — последовательность корней уравнения  $\operatorname{ctg} x = x$ . Покажем, что система  $\{\cos(\xi_n x)\}$  ортогональна на отрезке  $[0, 1]$ .

Действительно, во-первых,  $\int_0^1 \cos^2(\xi_n x) dx > 0$ . Во-вторых, если

$n \neq m$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(\xi_n x) \cos(\xi_m x) dx &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\xi_n - \xi_m)}{\xi_n - \xi_m} + \frac{\sin(\xi_n + \xi_m)}{\xi_n + \xi_m} \right) = \\ &= \frac{\xi_n \operatorname{ctg} \xi_m - \xi_m \operatorname{ctg} \xi_n}{(\xi_n^2 - \xi_m^2) \sin \xi_n \sin \xi_m} = 0. \end{aligned}$$

Ниже мы рассмотрим примеры ортогональных систем веса  $p(x)$ .



### § 3. Ряды Фурье по ортогональным системам

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана ортогональная по весу  $p(x)$  система  $\{\varphi_n(x)\}$ . Зададимся целью разложить определенную на  $[a, b]$  функцию  $f(x)$  в ряд по функциям этой системы:

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots \quad (3.1)$$

Для определения коэффициентов этого разложения допустим, что ряды

$$\begin{aligned} p(x) f(x) \varphi_n(x) &= c_0 p(x) \varphi_0(x) \varphi_n(x) + c_1 p(x) \varphi_1(x) \varphi_n(x) + \dots \\ &\quad + c_{n-1} p(x) \varphi_{n-1}(x) \varphi_n(x) + c_n p(x) \varphi_n^2(x) + \dots \\ &\quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

можно интегрировать почленно по отрезку  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int_a^b p(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx.$$

В силу ортогональности системы  $\{\varphi_n(x)\}$  по весу  $p(x)$ , все интегралы справа, кроме одного, обратятся в нуль, и, следовательно,

$$\int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx = c_n \int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx \quad (n = 0, 1, \dots),$$

откуда

$$c_n = \frac{\int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx}{\|\varphi_n\|^2} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (3.2)$$

Ряд (3.1) с коэффициентами, определяемыми по формулам (3.2),

называется **рядом Фурье** функции  $f(x)$ , а сами коэффициенты – ее **коэффициентами Фурье** по системе  $\{\varphi_n(x)\}$ .

В случае ортонормированной системы формулы (3.2) выглядят особенно просто:

$$c_n = \int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (3.2^*)$$

Само собой разумеется, мы не утверждаем сходимости ряда (3.1), и до тех пор, пока не установлено, что ряд (3.1) сходится к  $f(x)$ , мы пишем:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

отмечая *формальную* связь ряда Фурье с функцией  $f(x)$ .

Из предыдущих рассуждений легко вытекает

**Теорема 3.1.** Если функции системы  $\{\varphi_n(x)\}$  непрерывны и для  $f(x)$  имеет место разложение (3.1), причем ряд справа сходится равномерно, то этот ряд есть ряд Фурье для  $f(x)$ .

#### § 4. Линейная независимость.

##### Процесс Грама-Шмидта построения ортогональных систем

**Определение.** Система функций  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$ , заданных на отрезке  $[a, b]$ , называется **линейно зависимой**, если существуют постоянные  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , из которых хоть одна отлична от нуля, удовлетворяющие условию:

$$\alpha_0 \omega_0(x) + \alpha_1 \omega_1(x) + \dots + \alpha_n \omega_n(x) \equiv 0 \quad (4.1)$$

(напомним, что функция тождественна нулю, если она равна нулю всюду).

ду на  $[a, b]$ , кроме, быть может, конечного числа точек). Если таких постоянных не существует, а из (4.1) следует, что

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

то система  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$  называется **линейно независимой**.

Если среди функций системы имеется функция, тождественно равная нулю, то система линейно зависима. Если некоторая часть системы сама образует линейно зависимую систему, то и вся система линейно зависима.

**Утверждение 4.1.** Всякая конечная ортогональная система веса  $p(x)$  линейно независима.

*Доказательство.* Пусть  $\{\varphi_k(x)\}$  – такая система и

$$\alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0.$$

Умножая это равенство на  $p(x)\varphi_k(x)$  и интегрируя, найдем:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \int_a^b p(x) \varphi_0(x) \varphi_k(x) dx + \alpha_1 \int_a^b p(x) \varphi_1(x) \varphi_k(x) dx + \dots \\ + \alpha_n \int_a^b p(x) \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = 0, \end{aligned}$$

откуда  $\alpha_k = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).  $\square$

**Определение.** Бесконечная система функций  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x), \dots$  называется **линейно независимой**, если линейно независима всякая конечная часть этой системы.

**Определение.** Пусть функции  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$  принадлежат классу  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Определитель

10

2)

ийн

0

(4.2)

HO

7

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) \omega_0(x) [\alpha_0 \omega_0(x) + \alpha_1 \omega_1(x) + \dots + \alpha_n \omega_n(x)] dx &= 0, \\ \int_a^b p(x) \omega_1(x) [\alpha_0 \omega_0(x) + \alpha_1 \omega_1(x) + \dots + \alpha_n \omega_n(x)] dx &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \int_a^b p(x) \omega_n(x) [\alpha_0 \omega_0(x) + \alpha_1 \omega_1(x) + \dots + \alpha_n \omega_n(x)] dx &= 0. \end{aligned}$$

Умножив первое из этих равенств на  $\alpha_0$ , второе – на  $\alpha_1$  и т.д. и сложив полученные результаты, получим:

$$\int_a^b p(x) [\alpha_0 \omega_0(x) + \alpha_1 \omega_1(x) + \dots + \alpha_n \omega_n(x)]^2 dx = 0,$$

откуда и следует (4.1), т.е. линейная зависимость системы  $\{\omega_k(x)\}$ .  $\square$

**Следствие.** Если  $\Delta_n \neq 0$ , то ни один из определителей  $\Delta_0 = \langle \omega_0, \omega_0 \rangle, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$  также не равен нулю.

*Доказательство.* Из того, что  $\Delta_n \neq 0$ , следует линейная независимость системы  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$ , но тогда линейно независима и всякая подсистема  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_m(x)$  ( $m < n$ ), откуда вытекает, что  $\Delta_m \neq 0$ .  $\square$

**Лемма 4.3.** Пусть функции  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$  принадлежат классу  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Положим

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} \langle \omega_0, \omega_0 \rangle & \langle \omega_0, \omega_1 \rangle & \dots & \langle \omega_0, \omega_{n-1} \rangle & \omega_0(x) \\ \langle \omega_1, \omega_0 \rangle & \langle \omega_1, \omega_1 \rangle & \dots & \langle \omega_1, \omega_{n-1} \rangle & \omega_1(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \omega_n, \omega_0 \rangle & \langle \omega_n, \omega_1 \rangle & \dots & \langle \omega_n, \omega_{n-1} \rangle & \omega_n(x) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\langle \psi_n, \omega_k \rangle = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \Delta_n, & k = n. \end{cases}$$

*Доказательство.* Развернем определитель  $\psi_n(x)$  по элементам последнего столбца; получим

$$\psi_n(x) = \alpha_0 \omega_0(x) + \alpha_1 \omega_1(x) + \dots + \alpha_{n-1} \omega_{n-1}(x) + \Delta_{n-1} \omega_n(x). \quad (4.3)$$

Откуда, умножая на  $p(x) \omega_k(x)$  и интегрируя, получим:

$$\langle \psi_n, \omega_k \rangle = \alpha_0 \langle \omega_0, \omega_k \rangle + \alpha_1 \langle \omega_1, \omega_k \rangle + \dots + \alpha_{n-1} \langle \omega_{n-1}, \omega_k \rangle + \Delta_{n-1} \langle \omega_n, \omega_k \rangle.$$

Поэтому ясно, что если  $k < n$ , то определитель  $\langle \psi_n, \omega_k \rangle$  содержит два одинаковых столбца и, следовательно, равен нулю. Если же  $k = n$ , то по определению  $\langle \psi_n, \omega_k \rangle = \Delta_n$ .  $\square$

Из (4.3) следует, что если функции  $\{\omega_k(x)\}$  линейно независимы, то  $\psi_n(x)$  не может быть нулем (так как  $\Delta_{n-1} \neq 0$ ). Умножая (4.3) на  $p(x) \psi_n(x)$ , интегрируя и пользуясь леммой 4.3, найдем

$$\int_a^b p(x) \psi_n^2(x) dx = \Delta_{n-1} \Delta_n. \quad (4.4)$$

Отсюда вытекает, что определитель  $\Delta_n$  имеет тот же знак, что и  $\Delta_{n-1}$ . По тем же соображениям одинаковы знаки у  $\Delta_{n-1}$  и  $\Delta_{n-2}$ , а зна-

чит, и у  $\Delta_n$  и  $\Delta_{n-2}$ . Рассуждая таким образом, мы установим, что знак  $\Delta_n$  совпадает со знаком  $\Delta_0 = \langle \omega_0, \omega_0 \rangle > 0$ . Следовательно, доказана

**Лемма 4.4.** Определитель Грама линейно независимой системы строго положителен.

Теперь мы в состоянии доказать **теорему об ортогонализации**.

**Теорема 4.5.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана конечная или бесконечная линейно независимая система функций  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x), \dots$ , входящих в  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Тогда можно построить такую ортонормированную систему  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ , что

1) всякая  $\varphi_n(x)$  есть линейная комбинация функций  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$ :

$$\varphi_n(x) = \alpha_{n0}\omega_0(x) + \alpha_{n1}\omega_1(x) + \dots + \alpha_{nn}\omega_n(x), \quad \alpha_{nn} \neq 0,$$

2) всякая  $\omega_n(x)$  есть линейная комбинация функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ :

$$\omega_n(x) = \beta_{n0}\varphi_0(x) + \beta_{n1}\varphi_1(x) + \dots + \beta_{nn}\varphi_n(x), \quad \beta_{nn} \neq 0.$$

*Доказательство.* Положим

$$\varphi_0(x) = \frac{\omega_0(x)}{\sqrt{\Delta_0}}, \quad \varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}, \quad (n \geq 1)$$

где  $\psi_n(x)$  – определитель, рассмотренный в лемме 4.3.

Так как  $\psi_n(x)$  есть линейная комбинация функций  $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$ , то и  $\varphi_n(x)$  есть такая же линейная комбинация.

Далее, по лемме 4.3  $\psi_n(x)$  ортогональна ко всем функциям

$\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_{n-1}(x)$ , а значит, и к их линейным комбинациям. В частности, функция  $\psi_n(x)$ , а вместе с ней и  $\varphi_n(x)$ , ортогональна ко всем функциям  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ . Таким образом, система  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  ортогональна (по весу  $p(x)$ ). Из (4.4) вытекает, что при  $n \geq 1$

$$\int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx = 1,$$

а при  $n = 0$  это равенство тривиально. Следовательно,  $\{\varphi_n(x)\}$  – ортонормированная система.

Покажем, что  $\omega_n(x)$  линейно выражается через  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ . Для  $n = 0$  это очевидно. Рассуждая по индукции, предположим, что это уже доказано для всех  $n < m$  и докажем это утверждение для  $n = m$ . В силу (4.3) имеем:

$$\begin{aligned} \omega_m(x) &= \frac{1}{\Delta_{m-1}} \psi_m(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\Delta_{m-1}} \omega_i(x) = \\ &= \frac{1}{\Delta_{m-1}} \sqrt{\Delta_{m-1} \Delta_m} \varphi_m(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\Delta_{m-1}} (\beta_{i0} \varphi_0 + \dots + \beta_{in} \varphi_i). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\omega_m(x)$  есть линейная комбинация функций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ .  $\square$

Процесс построения ортонормированной системы  $\{\varphi_n(x)\}$  называется **процессом ортогонализации Грама-Шмидта** исходной системы  $\{\omega_k(x)\}$ .

Результаты этого параграфа сыграют важную роль в дальнейшем изложении.



## § 5. Экстремальное свойство частных сумм ряда Фурье

Пусть  $f(x)$  – произвольная, заданная на отрезке  $[a, b]$  функция, принадлежащая пространству  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ , а  $\{\varphi_n(x)\}$  – ортогональная система веса  $p(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Рассмотрим многочлен  $n$ -го порядка по системе  $\{\varphi_n(x)\}$ :

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x), \quad (5.1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – произвольные постоянные. Поставим себе задачу: при данном  $n$  выбрать коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  так, чтобы **среднее квадратичное отклонение**

$$\delta_n = \|f - U_n\|^2 = \int_a^b p(x) [f(x) - U_n(x)]^2 dx \quad (5.2)$$

было наименьшим.

Из (5.2) следует:

$$\delta_n = \int_a^b p(x) f^2(x) dx - 2 \int_a^b p(x) f(x) U_n(x) dx + \int_a^b p(x) U_n^2(x) dx.$$

Но

$$\int_a^b p(x) f(x) U_n(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k c_k \|\varphi_k\|^2,$$

где  $c_k$  – коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ , а

$$\int_a^b p(x) U_n^2(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2,$$

в силу ортогональности системы  $\{\varphi_n(x)\}$ . Поэтому

$$\delta_n = \int_a^b p(x) f^2(x) dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k c_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=0}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2,$$

откуда, выделяя полные квадраты, получим:

$$\delta_n = \int_a^b p(x) f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=0}^n (a_k - c_k)^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Отсюда видно, что величина  $\delta_n$  принимает наименьшее значение, когда

$$a_k = c_k \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Таким образом, доказана

**Теорема 5.1.** Из всех линейных комбинаций вида (5.1) наименьшее возможное значение величине (5.2) доставляет частная сумма ряда Фурье функции  $f(x)$ :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x),$$

причем это наименьшее значение равно

$$\|f - S_n\|^2 = \int_a^b p(x) f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (5.3)$$

Так как  $\|f - S_n\|^2 \geq 0$ , то из (5.3) следует неравенство

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b p(x) f^2(x) dx,$$

из которого видно, что ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$  сходится для любой функции из

$\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ . Поэтому, переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим **неравенство Бесселя**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b p(x) f^2(x) dx.$$

Если система  $\{\varphi_n(x)\}$  – ортонормированная, то неравенство Бесселя будет иметь вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b p(x) f^2(x) dx,$$

т.е. ряд из квадратов коэффициентов Фурье сходится. Отсюда сразу вытекает, что коэффициенты Фурье стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

## § 6. Замкнутость и полнота ортогональных систем. Сходимость в среднем ряда Фурье

**Определение.** Если для любой функции  $f(x)$  из  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \int_a^b p(x) f^2(x) dx, \quad (6.1)$$

то ортогональная система  $\{\varphi_n(x)\}$  называется **замкнутой**. Равенство (6.1) называется **равенством Парсеваля** или **уравнением замкнутости**.

В предыдущей главе (§ 15) мы показали, что тригонометрическая система является замкнутой в пространстве функций, интегрируемых с их квадратами. В общем случае не всякая ортогональная система является замкнутой. Мы укажем критерии замкнутости системы.

**Теорема 6.1.** Для того чтобы система  $\{\varphi_n(x)\}$  была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции  $f(x)$  из

$\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  выполнялось соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right]^2 dx = 0. \quad (6.2)$$

*Доказательство.* Условие (6.1) эквивалентно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_a^b p(x) f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \right] = 0,$$

что, в свою очередь, благодаря равенству (5.3), эквивалентно (6.2).  $\square$

Если выполняется равенство (6.2), то говорят, что ряд Фурье **сходится к  $f(x)$  в среднем**. Поэтому теорему 6.1 можно переформулировать так:

**Теорема 6.1'.** Для того чтобы система  $\{\varphi_n(x)\}$  была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы ряд Фурье для любой функции  $f(x)$  из  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  сходилась к ней в среднем.

Заметим, что *обычная сходимость* ряда Фурье к функции, для которой он составлен, не всегда имеет место даже для замкнутых систем. В этом мы убедились в предыдущей главе. Однако мы только что доказали, что для замкнутых систем *сходимость в среднем* всегда имеет место (в пространстве  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ ). Поэтому мы можем рассматривать эту сходимость как обобщение обычной сходимости. Для того чтобы такое обобщение было корректным, мы должны показать, что ряд Фурье сходится в среднем лишь к одной функции.

Предположим противное, что наряду с (6.2) имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) \left[ g(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right]^2 dx = 0. \quad (6.3)$$

Воспользовавшись элементарным неравенством

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

получим:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_a^b p(x) [g(x) - f(x)]^2 dx = \\
&= \int_a^b p(x) \left[ \left( g(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right) + \left( \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k - f(x) \right) \right]^2 dx \leq \\
&\leq 2 \int_a^b p(x) \left[ g(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right]^2 dx + 2 \int_a^b p(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right]^2 dx.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу (6.2) и (6.3)

$$\int_a^b p(x) [g(x) - f(x)]^2 dx = 0.$$

Поэтому  $g(x) \equiv f(x)$ .

Таким образом, доказана

**Теорема 6.2.** Если система  $\{\varphi_n(x)\}$  замкнута, то всякая функция

$f(x)$  из  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  однозначно определена (с точностью до значений в конечном числе точек) своим рядом Фурье независимо от того, сходится этот ряд или нет.

**Определение.** Система  $\{\varphi_n(x)\}$  называется **полной**, если в  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  не существует функции, не равной нулю тождественно и ортогональной ко всем функциям системы.

**Теорема 6.3.** Замкнутая система полна.

**Доказательство.** Если ортогональная система  $\{\varphi_n(x)\}$  веса  $p(x)$  замкнута, а функция  $f(x)$  ортогональна ко всем  $\varphi_n(x)$ , то все коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  равны нулю. Значит, равенство Парсеваля примет вид

$$\int_a^b p(x) f^2(x) dx = 0,$$

откуда следует, что  $f(x) \equiv 0$ .  $\square$

**Теорема 6.4.** Если система  $\{\varphi_n(x)\}$  замкнута, то ряд Фурье для каждой функции из  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  можно интегрировать почленно с весом  $p(x)$ , независимо от того, сходится он или нет.

*Доказательство.* Нам надо доказать, что если

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

то

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{x_1}^{x_2} p(x) \varphi_n(x) dx,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – любые точки из отрезка  $[a, b]$ .

Для определенности предположим, что  $x_1 < x_2$ . Получим:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_1}^{x_2} p(x) f(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k \int_{x_1}^{x_2} p(x) \varphi_k(x) dx \right| \leq \\ & \int_{x_1}^{x_2} p(x) \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx \leq \int_a^b p(x) \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx \leq \quad (6.4) \\ & \leq \sqrt{\int_a^b p(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx \cdot \int_a^b p(x) dx} \end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенством Буняковского). По теореме 6.1 последний член в (6.4) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{x_1}^{x_2} p(x) f(x) dx - \sum_{k=0}^n c_k \int_{x_1}^{x_2} p(x) \varphi_k(x) dx \right] = 0. \square$$

Укажем еще один признак замкнутости системы.

**Теорема 6.5.** Если для всякой непрерывной на  $[a, b]$  функции  $F(x)$  для любого  $\varepsilon > 0$  существует многочлен

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x),$$

для которого

$$\int_a^b p(x) [F(x) - U_n(x)]^2 dx \leq \varepsilon, \quad (6.5)$$

то система  $\{\varphi_n(x)\}$  замкнута.

## § 7. Ортогональные полиномы

Система степеней  $\{x^k\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) линейно независима на любом отрезке  $[a, b]$ . Поэтому по теореме 4.5 об ортогонализации ее можно ортогонализировать при всякой весовой функции.

Обозначим

$$\int_a^b p(x) x^n dx = \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(эти числа называются **моментами** весовой функции  $p(x)$ ). Тогда

$$\langle x^l, x^m \rangle = \int_a^b p(x) x^{l+m} dx = \mu_{l+m}.$$

Поэтому определитель Грама

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,x \rangle & & \langle 1,x^n \rangle \\ \langle x,1 \rangle & \langle x,x \rangle & \dots & \langle x,x^n \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle x^n,1 \rangle & \langle x^n,x \rangle & \dots & \langle x^n,x^n \rangle \end{vmatrix}$$

примет вид

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad (7.1)$$

функция  $\psi_n(x)$  из леммы 4.3 будет иметь вид

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

а функции  $\varphi_n(x)$ , образующие ортонормированную систему, будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}}, \\ \varphi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (n=1,2,\dots) \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$



Заметим, что  $\varphi_n(x)$  есть полином степени  $n$ , так как коэффициент при  $x^n$  в  $\varphi_n(x)$  равен

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} \neq 0.$$

Таким образом, доказанная нами теорема об ортогонализации будет теперь звучать так:

**Теорема 7.1.** Для всякой весовой функции  $p(x)$  на  $[a, b]$  существует система полиномов

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (7.3)$$

где  $\varphi_n(x)$  – полином степени  $n$ , являющаяся ортонормированной системой веса  $p(x)$ .

Систему (7.3) можно определить формулой (7.2). Естественно возникает вопрос: не существует ли ортонормированных систем веса  $p(x)$ , отличных от той, которая строится по формуле (7.2)? Так как умножение одной или нескольких функций системы (7.3) на  $-1$  сохраняет ортонормированность системы, то ясно, что полной единственности нет. Однако при некоторых условиях можно доказать единственность системы (7.3).

**Лемма 7.2.** Если

$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$$

– система полиномов, в которой полином  $Q_k(x)$  имеет точно  $k$ -ю степень, то всякий полином  $P_n(x)$  степени  $n \geq 0$  единственным образом представляется в виде:

$$P_n(x) = \alpha_0 Q_0(x) + \alpha_1 Q_1(x) + \dots + \alpha_n Q_n(x). \quad (7.4)$$

*Доказательство.* Пусть

$$Q_k(x) = q_0^{(k)} + q_1^{(k)}x + \dots + q_k^{(k)}x^k \quad (q_k^{(k)} \neq 0),$$

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n.$$

Равенство (7.4) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\alpha_n q_n^{(n)} = p_n,$$

$$\alpha_{n-1} q_{n-1}^{(n-1)} + \alpha_n q_{n-1}^{(n)} = p_{n-1},$$

.....

$$\alpha_0 q_0^{(0)} + \alpha_1 q_0^{(1)} + \dots + \alpha_n q_0^{(n)} = p_0.$$

Определитель этой системы равен  $q_n^{(n)} q_{n-1}^{(n-1)} \dots q_0^{(0)} \neq 0$ . Следовательно, числа  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  в выражении (7.4) определяются однозначно.  $\square$

**Теорема 7.3.** Если система полиномов

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$$

ортонормирована по весу  $p(x)$ , полином  $P_n(x)$  имеет точно  $n$ -ю степень и старший коэффициент  $P_n(x)$  положителен, то

$$P_n(x) = \varphi_n(x),$$

где  $\varphi_n(x)$  определяется формулой (7.2).

*Доказательство.* По лемме 7.2

$$P_n(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x). \quad (7.5)$$

Но по той же лемме полиномы  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$  линейно выражаются через  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$  и, следовательно, ортогональны к  $P_n(x)$ . Умножая (7.5) последовательно на  $p(x)\varphi_0(x), p(x)\varphi_1(x),$

...  $p(x)\varphi_{n-1}(x)$  и каждый раз интегрируя, найдем:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0.$$

Значит,  $P_n(x) = \alpha_n \varphi_n(x)$ . Отсюда

$$\int_a^b p(x) P_n^2(x) dx = \alpha_n^2 \int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx.$$

Но оба интеграла равны 1. Следовательно,  $\alpha_n = \pm 1$ , а так как знаки старших коэффициентов  $P_n(x)$  и  $\varphi_n(x)$  совпадают, то  $\alpha_n = 1$ .  $\square$

Установим необходимое и достаточное условие ортогональности полинома  $P_n(x)$ , которое нам понадобится в дальнейшем.

**Теорема 7.4.** Для того чтобы полином  $P_n(x)$  степени  $n$  был ортогональным с весом  $p(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы для всякого полинома  $Q_k(x)$  степени  $k < n$  выполнялось условие

$$\int_a^b p(x) P_n(x) Q_k(x) dx = 0 \quad (k < n). \quad (7.6)$$

*Доказательство.* Пусть полином  $P_n(x)$  является ортогональным, т.е. входит в систему ортогональных полиномов  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$  веса  $p(x)$ . По лемме 7.2 имеем

$$Q_k(x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \dots + \alpha_k P_k(x).$$

Подставляя это разложение в интеграл (7.6), в силу ортогональности полиномов системы  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$  получим равенство (7.6).

Обратно, пусть некоторый полином  $P_n(x)$  удовлетворяет условию (7.6) с заданным весом  $p(x)$ . Подставим в (7.6) вместо  $Q_k(x)$  любой

полином из ортонормированной системы  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ .  $P_n(x)$  ортогонален с весом  $p(x)$  любому полиному из этой системы. Положим  $P_0(x) = \varphi_0(x), P_1(x) = \varphi_1(x), \dots, P_{n-1}(x) = \varphi_{n-1}(x)$ . Полиномы  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  ортогональны. Построим полином  $P_{n+1}(x)$  путем ортогонализации системы  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), x^{n+1}$ . Продолжая далее таким образом, построим ортогональную систему полиномов, содержащую  $P_n(x)$ .  $\square$

Ниже мы будем иметь дело с ортогональными, но не с ортонормированными системами полиномов. Оказывается, что такая система однозначно определяется заданием старших коэффициентов всех полиномов.

**Теорема 7.5.** Пусть

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$$

– ортогональная система веса  $p(x)$ , где  $P_n(x)$  – полином степени  $n$ .

Если старший коэффициент  $P_n(x)$  есть  $K_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), то

$$P_0(x) = K_0, P_n(x) = K_n \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} \varphi_n(x) \quad (n \geq 1). \quad (7.7)$$

*Доказательство.* Значение  $P_0(x) = K_0$  очевидно. Выражение для  $P_n(x)$  при  $n \geq 1$  устанавливается, как и в теореме 7.3.  $\square$

В частности, при  $K_n = 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) будем иметь

$$\tilde{\varphi}_0(x) = 1, \tilde{\varphi}_n(x) = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} \varphi_n(x) \quad (n \geq 1). \quad (7.8)$$

Из формул (7.7) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|P_0\|^2 &= \int_a^b p(x) P_0^2(x) dx = K_0^2 \Delta_0, \quad \|P_n\|^2 = \\ &= \int_a^b p(x) P_n^2(x) dx = K_n^2 \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.\end{aligned}\quad (7.9)$$

Итак, всякая весовая функция  $p(x)$  однозначно определяет систему ортогональных полиномов. Наиболее важное теоретическое и прикладное значение имеют следующие системы:

1. Полиномы Чебышева первого рода  $\{T_n(x)\}$ , ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

2. Полиномы Чебышева второго рода  $\{U_n(x)\}$ , ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом

$$p(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

3. Полиномы Лежандра  $\{P_n(x)\}$ , ортогональные на  $[-1, 1]$  с весом

$$p(x) \equiv 1.$$

## § 8. Корни ортогональных полиномов. Рекуррентная формула

Следуя обозначениям предыдущего параграфа, рассмотрим некоторые алгебраические свойства ортогональных полиномов.

**Теорема 8.1.** Все корни полинома  $\varphi_n(x)$  вещественные, простые и лежат внутри интервала  $(a, b)$ .

**Доказательство.** Допустим сначала, что в интервале  $(a, b)$  нет корней нечетной кратности полинома  $\varphi_n(x)$ . Тогда полином  $\varphi_n(x)$  на отрезке  $[a, b]$  не меняет знака и

$$\int_a^b p(x) \varphi_n(x) dx \neq 0,$$

что противоречит ортогональности  $\varphi_n(x)$  и  $\varphi_0(x) = \text{const}$ . Следовательно, внутри  $(a, b)$  обязательно имеются корни нечетной кратности  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ . Пусть их число  $r < n$ . Положим

$$Q(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_r).$$

Полином  $Q(x)$  имеет степень  $r$  и потому ортогонален к  $\varphi_n(x)$  (так как  $Q(x)$  линейно выражается через  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$ ). Значит, должно быть

$$\int_a^b p(x) Q(x) \varphi_n(x) dx = 0,$$

что, однако, невозможно, так как произведение  $Q(x) \varphi_n(x)$  имеет на  $(a, b)$  корни только четной кратности и не меняет знака на  $[a, b]$ . Следовательно,  $r = n$ .  $\square$

Из доказанной теоремы следует, что для корней  $\{x_k^{(n)}\}$  ортогонального полинома  $\varphi_n(x)$  имеют место неравенства

$$a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_k^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < b.$$

**Теорема 8.2.** Три последовательных полинома  $\tilde{\varphi}_{n+2}(x)$ ,  $\tilde{\varphi}_{n+1}(x)$

и  $\tilde{\varphi}_n(x)$ , определяемых по формуле (7.8), связаны **рекуррентным соотношением**:

$$\tilde{\varphi}_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2})\tilde{\varphi}_{n+1}(x) - \lambda_{n+1}\tilde{\varphi}_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.1)$$

где  $\alpha_{n+2}$  и  $\lambda_{n+1}$  – некоторые постоянные.

*Доказательство.* Рассмотрим произведение  $x\tilde{\varphi}_{n+1}(x)$ . Будучи полиномом степени  $n+2$ , оно может быть представлено в виде

$$x\tilde{\varphi}_{n+1}(x) = c_0\tilde{\varphi}_0(x) + c_1\tilde{\varphi}_1(x) + \dots + c_{n+2}\tilde{\varphi}_{n+2}(x). \quad (8.2)$$

Сравнивая старшие коэффициенты, найдем, что  $c_{n+2} = 1$ . Умножим, далее, равенство (8.1) на  $p(x)\tilde{\varphi}_k(x)$ ,  $k < n$ , и проинтегрируем полученное равенство:

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)x\tilde{\varphi}_k(x)\tilde{\varphi}_{n+1}(x)dx &= c_0 \int_a^b p(x)\tilde{\varphi}_0(x)\tilde{\varphi}_k(x)dx + \dots + \\ &+ c_k \int_a^b p(x)\tilde{\varphi}_k^2(x)dx + \dots + \int_a^b p(x)\tilde{\varphi}_{n+2}(x)\tilde{\varphi}_k(x)dx. \end{aligned}$$

Так как степень полинома  $x\tilde{\varphi}_k(x)$  меньше  $n+1$ , то слева получится 0. Справа же останется только слагаемое  $c_k \int_a^b p(x)\tilde{\varphi}_k^2(x)dx$ , в силу ортогональности системы  $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}$ . Поэтому  $c_k = 0$ . Таким образом,

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0,$$

и равенство (8.2) примет вид:

$$x\tilde{\varphi}_{n+1}(x) = c_n\tilde{\varphi}_n(x) + c_{n+1}\tilde{\varphi}_{n+1}(x) + \tilde{\varphi}_{n+2}(x).$$

Полагая здесь  $c_n = \lambda_{n+1}$  и  $c_{n+1} = \alpha_{n+2}$  получим (8.1).  $\square$

Заменяя полиномы  $\tilde{\varphi}_n(x)$  их выражениями (7.8), мы получим рекуррентную формулу для ортонормированных полиномов  $\{\varphi_n(x)\}$ :

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}} \varphi_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2}) \sqrt{\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}} \varphi_{n+1}(x) - \lambda_{n+1} \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} \varphi_n(x) \quad (8.3)$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Чтобы эта формула была пригодна и для  $n = 0$ , нужно положить  $\Delta_{-1} = 1$ .

Определим числа  $\alpha_{n+2}$  и  $\lambda_{n+1}$ , входящие в (8.1). Если умножить (8.1) на  $p(x)\tilde{\varphi}_{n+1}(x)$  и проинтегрировать, то окажется, что

$$\int_a^b p(x)(x - \alpha_{n+2})\tilde{\varphi}_{n+1}^2(x)dx = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_{n+2} = \frac{\int_a^b p(x)x\tilde{\varphi}_{n+1}^2(x)dx}{\int_a^b p(x)\tilde{\varphi}_{n+1}^2(x)dx}. \quad (8.4)$$

Из (8.4) следует, что  $a < \alpha_{n+2} < b$ .

Чтобы определить  $\lambda_{n+1}$ , умножим (8.1) на  $p(x)\tilde{\varphi}_n(x)$  и проинтегрируем полученное равенство. В результате получим:

$$\lambda_{n+1} \int_a^b p(x)\tilde{\varphi}_n^2(x)dx = \int_a^b p(x)x\tilde{\varphi}_n(x)\tilde{\varphi}_{n+1}(x)dx.$$

Но произведение  $x\tilde{\varphi}_n(x)$  можно представить в виде

$$x\tilde{\varphi}_n(x) = \tilde{\varphi}_{n+1}(x) + R(x),$$



где  $R(x)$  - полином степени меньшей, чем  $n + 1$ , так что

$$\int_a^b p(x) R(x) \tilde{\varphi}_{n+1}(x) dx = 0.$$

Поэтому

$$\lambda_{n+1} = \frac{\int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_{n+1}^2(x) dx}{\int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_n^2(x) dx}. \quad (8.5)$$

Отсюда видно, что при всех  $n$

$$\lambda_{n+1} > 0.$$

Если воспользоваться формулами (7.9), то (8.5) примет вид

$$\lambda_{n+1} = \frac{\Delta_{n-1} \Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}. \quad (8.6)$$

Это соотношение верно и для  $n = 0$ , если положить  $\Delta_{-1} = 1$ .

Так как

$$\int_a^b p(x) x \tilde{\varphi}_n(x) \tilde{\varphi}_{n+1}(x) dx = \int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_{n+1}^2(x) dx,$$

то, обозначив наибольшее из чисел  $|a|$  и  $|b|$  через  $C$ , получим, что

$$\int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_{n+1}^2(x) dx \leq C \int_a^b p(x) |\tilde{\varphi}_n(x)| |\tilde{\varphi}_{n+1}(x)| dx.$$

В силу неравенства Буняковского

$$\int_a^b p(x) |\tilde{\varphi}_n(x)| |\tilde{\varphi}_{n+1}(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_n^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_{n+1}^2(x) dx}.$$

Следовательно,

$$\int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_{n+1}^2(x) dx \leq C \sqrt{\int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_n^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b p(x) \tilde{\varphi}_{n+1}^2(x) dx},$$

откуда ввиду (8.5) получим оценку:

$$\lambda_{n+1} \leq C^2.$$

Из теоремы 8.2 вытекают два следствия.

**Следствие 8.3.** Соседние полиномы  $\varphi_{n+2}(x)$  и  $\varphi_{n+1}(x)$  не могут иметь общего корня.

**Следствие 8.4.** Если  $x_0$  есть корень полинома  $\varphi_{n+1}(x)$ , то числа  $\varphi_{n+2}(x_0)$  и  $\varphi_n(x_0)$  имеют разные знаки.

Приведем без доказательства еще одну теорему о корнях ортогональных полиномов.

**Теорема 8.5.** Пусть  $a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < b$  – последовательность корней полинома  $\varphi_n(x)$ ,  $n > 0$ . Тогда для корней соседних ортогональных полиномов  $\varphi_n(x)$  и  $\varphi_{n+1}(x)$  имеют место неравенства:

$$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < \dots < x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n+1)} < x_{k+1}^{(n)} < \dots < x_n^{(n+1)} < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b.$$

## § 9. Ряды Фурье по ортогональным полиномам.

### Формула Кристоффеля-Дарбу.

### Сходимость ортогональных разложений

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана ортонормированная система полиномов  $\{\varphi_n(x)\}$  веса  $p(x)$  и пусть  $f(x)$  – некоторая функция из  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ .

**Ряд Фурье**  $f(x)$  по системе  $\{\varphi_n(x)\}$  имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad (9.1)$$

где

$$c_n = \int_a^b p(t) f(t) \varphi_n(t) dt.$$

Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$$

– частная сумма ряда (9.1). Подставляя в нее интегральные выражения коэффициентов  $c_k$ , получим:

$$S_n(x) = \int_a^b p(t) f(t) \left[ \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right] dt. \quad (9.2)$$

Выражение

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) \quad (9.3)$$

называется **ядром Дирихле** интеграла (9.2). Оно играет важную роль при исследовании сходимости ряда (9.1).

Замечание. В главе 1 мы уже имели дело с частным случаем ядра  $K_n(t, x)$  для основной тригонометрической системы. Это ядро Дирихле  $D_n(t - x)$ .

**Теорема 9.1.** Справедлива формула

$$K_n(t, x) = \sqrt{\lambda_{n+1}} \frac{\varphi_{n+1}(t) \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) \varphi_n(t)}{t - x}. \quad (9.4)$$

Эта формула называется **формулой Кристоффеля-Дарбу**<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Э. Б. Кристоффель (1829-1900) – немецкий математик. Г. Дарбу (1842-1917) – французский математик.

*Доказательство.* Перепишем рекуррентную формулу (8.3), уменьшив  $n$  на единицу:

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}} \varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1}) \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} \varphi_n(x) - \lambda_n \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}} \varphi_{n-1}(x) \quad (9.5)$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

где

$$\lambda_n = \frac{\Delta_{n-2} \Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}. \quad (9.6)$$

Умножим (9.5) на  $\varphi_n(t)$  и из полученного равенства вычтем равенство, которое получается из него перестановкой  $t$  и  $x$ ;

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}} [\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t) \varphi_n(x)] = \\ & = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} (x - t) \varphi_n(t) \varphi_n(x) + \lambda_n \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}} [\varphi_n(x) \varphi_{n-1}(t) - \varphi_n(t) \varphi_{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

Умножив это равенство на  $\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$  и приняв во внимание (9.6), получим:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\lambda_{n+1}} [\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t) \varphi_n(x)] = \\ & = (x - t) \varphi_n(t) \varphi_n(x) + \sqrt{\lambda_n} [\varphi_n(x) \varphi_{n-1}(t) - \varphi_n(t) \varphi_{n-1}(x)]. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Заменим здесь  $n$  последовательно на  $n-1, n-2, \dots, 1$  и сложим полученные равенства друг с другом и с (9.7). После сокращений окажется:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\lambda_{n+1}} [\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(t) - \varphi_{n+1}(t) \varphi_n(x)] = \\ & = (x - t) \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) + \sqrt{\lambda_1} [\varphi_1(x) \varphi_0(t) - \varphi_1(t) \varphi_0(x)]. \end{aligned}$$

Но

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}}, \quad \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{\Delta_0}{\Delta_1}}(x - \alpha_1), \quad \lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0^2}.$$

Значит,

$$\sqrt{\lambda_1} [\varphi_1(x)\varphi_0(t) - \varphi_1(t)\varphi_0(x)] = \frac{x-t}{\Delta_0} = (x-t)\varphi_0(t)\varphi_0(x),$$

откуда и следует (9.4).  $\square$

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то по теореме Вейерштрасса о приближении непрерывной функции полиномами (теорема 14.2, гл. 1) для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такой полином  $P_n(x)$ , что равномерно для всех  $x \in [a, b]$  будет

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для данной  $f(x)$ , непрерывной на  $[a, b]$ , существует последовательность полиномов  $\{P_n(x)\}$ , сходящаяся к  $f(x)$  равномерно на  $[a, b]$ . В силу экстремального свойства частных сумм ряда Фурье

$$\|f - S_n\| \leq \|f - P_n\| = \sqrt{\int_a^b p(x) |f(x) - P_n(x)|^2 dx} < \varepsilon \sqrt{\int_a^b p(x) dx} = \varepsilon \sqrt{\mu_0}.$$

Таким образом, если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то последовательность частных сумм ее ряда Фурье по ортогональным полиномам сходится к этой функции в среднем.

Рассмотрим теперь условия сходимости ряда (9.1) к функции  $f(x)$  в некоторой точке  $x$  отрезка  $[a, b]$ . Пусть  $S(x)$  – предполагаемая сумма ряда (9.1) в точке  $x \in [a, b]$ . Если функция  $f(t)$  непрерывна в точ-

ке  $x$ , то  $S(x) = f(x)$ , если же в точке  $x$  функция  $f(t)$  имеет разрыв первого рода, то  $S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ . Умножая тождество

$$\int_a^b p(t) K_n(t, x) dt = 1$$

на  $S(x)$  и вычитая его из (9.2), получим

$$S_n(x) - S(x) = \int_a^b p(t) [f(t) - S(x)] K_n(t, x) dt.$$

Применяя формулу Кристоффеля-Дарбу, найдем:

$$\begin{aligned} S_n(x) - S(x) &= \\ &= \sqrt{\lambda_{n+1}} \int_a^b p(x) \frac{f(t) - S(x)}{t - x} [\varphi_{n+1}(t) \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) \varphi_n(t)] dt. \end{aligned} \quad (9.8)$$

В § 8 мы получили оценку

$$\sqrt{\lambda_{n+1}} \leq C = \max \{|a|, |b|\}.$$

Полагая для краткости

$$\phi_x(t) = \frac{f(t) - S(x)}{t - x}$$

и обозначая через  $\{d_n\}$  коэффициенты Фурье функции  $\phi_x(t)$ , вместо (9.8) получим формулу

$$S_n(x) - S(x) = \theta_n C [d_{n+1} \varphi_n(x) - d_n \varphi_{n+1}(x)], \quad (9.9)$$

где  $0 < \theta_n \leq 1$ .

Теперь легко доказать достаточный признак сходимости в данной точке ряда Фурье по ортогональным полиномам.

**Теорема 9.2.** Если функция  $\phi_x(t) \in \tilde{R}_{p(t)}^2([a, b])$ , а последовательность ортонормированных полиномов  $\{\varphi_n(t)\}$  ограничена в точке  $x$ , то ряд Фурье по ортогональным полиномам функции  $f(t)$  сходится в данной точке  $x$  к сумме  $S(x)$ , т.е.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad x \in [a, b].$$

*Доказательство.* Так как  $\phi_x(t) \in \tilde{R}_{p(t)}^2([a, b])$ , ряд  $\sum d_n^2$  сходится. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0.$$

С другой стороны, последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  ограничена в точке  $x$ , т.е.,

$$|\varphi_n(x)| \leq M, \quad x \in [a, b].$$

Следовательно, правая часть (9.9) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .  
В частности, ряд Фурье по ортогональным полиномам сходится к  $f(x)$  в точке  $x$ , где она непрерывна, если функция  $f(t)$  в некоторой окрестности точки  $x$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ , т.е.

$$|f(t) - f(x)| \leq K|t - x|, \quad t \in (x - \delta, x + \delta).$$

Интеграл

$$\int_a^b p(t) \phi_x^2(t) dt$$

существует как несобственный, если весовая функция  $p(t)$  ограничена в некоторой окрестности точки  $x$ , а функция  $f(t)$  в этой же окрест-

ности удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha > \frac{1}{2}$ , т.е.

$$|f(t) - f(x)| \leq K|t - x|^\alpha, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \quad t \in (x - \delta, x + \delta).$$

Это следствие можно переформулировать и для случая, когда  $x$  является точкой разрыва первого рода функции  $f(t)$  (аналогично § 5, гл. 1). Для сходимости ряда (9.1) в точке  $x$  достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$|f(t) - f(x+0)| \leq K|t - x|^\alpha, \quad t \in (x, x + \delta)$$

и

$$|f(t) - f(x-0)| \leq K|t - x|^\alpha, \quad t \in (x - \delta, x),$$

$\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ . В этом случае суммой ряда (9.1) будет  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ .

При некоторых условиях сходимость ряда Фурье по ортогональным полиномам в данной точке  $x$  зависит только от свойств функции  $f(x)$  в окрестности этой точки. Поэтому, как и для рядов Фурье по тригонометрической системе, здесь можно сформулировать аналог принципа локализации условий сходимости.

**Теорема 9.3.** Если две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$  совпадают в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , причем в точке  $x_0$  ортонормированные полиномы  $\{\varphi_n(x)\}$  ограничены, то в этой точке ряды Фурье по ортогональным полиномам функций  $f(x)$  и  $g(x)$  сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.* По определению частных сумм ряда Фурье имеем:

$$S_n(x_0, f) - S_n(x_0, g) = S_n(x_0, f - g).$$



Поскольку функция  $r(x) = f(x) - g(x) \equiv 0$  в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , то для этой функции

$$\int_a^b p(t) \left( \frac{r(t) - r(x_0)}{t - x_0} \right)^2 dt < \infty.$$

Следовательно, ряд Фурье функции  $r(x)$  по ортогональным полиномам сходится к ней в точке  $x_0$ . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_0, f) - S_n(x_0, g)] = 0,$$

и, таким образом, если последовательность  $\{S_n(x_0, f)\}$  сходится к некоторому пределу, то к тому же пределу сходится и последовательность  $\{S_n(x_0, g)\}$ , а если  $\{S_n(x_0, f)\}$  расходится, то расходится и  $\{S_n(x_0, g)\}$ .  $\square$

# ГЛАВА 3. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО КЛАССИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

## § 1. Полиномы Чебышева первого рода

**Определение.** Функции

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

называются **полиномами Чебышева<sup>1</sup> (первого рода)**.

Покажем, что функции (1.1) действительно представляют собой алгебраические полиномы. Из известного тригонометрического тождества

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta \cos(n+1)\theta,$$

полагая  $\theta = \arccos x$ , найдем *рекуррентное соотношение*

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Поскольку  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ , то при любом  $n$  функция  $T_n(x)$  есть алгебраический полином степени  $n$ . С помощью формулы (1.2) их можно вычислять последовательно:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,$$

.....

<sup>1</sup> П.Л. Чебышев (1821–1866) – русский математик, создатель конструктивной теории функций.

Докажем, что полиномы (1.1) ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  по весу

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Для этого вычислим интеграл

$$J_{nm} = \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Сделаем замену переменной  $x = \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ). Тогда в силу (1.1)

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad \text{и}$$

$$J_{nm} = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0, \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases}$$

Следовательно, ортонормированные полиномы Чебышева выражаются через полиномы (1.1) по формулам

$$\begin{aligned} \hat{T}_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x), \quad n \geq 1, \\ \hat{T}_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Далее, из рекуррентной формулы (1.2) следует, что старший коэффициент полинома  $T_n(x)$  есть  $2^{n-1}$ . Поэтому полиномы Чебышева со старшим коэффициентом, равным 1, имеют вид

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad n \geq 1. \tag{1.4}$$

Рекуррентное соотношение (1.2) для полиномов  $\tilde{T}_n(x)$  преобразуется к виду

$$\tilde{T}_{n+2}(x) = x\tilde{T}_{n+1}(x) - \frac{1}{4}\tilde{T}_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если же  $n = 0$ , то  $T_0(x) = 1 = \tilde{T}_0(x)$  и из (1.2) следует, что

$$\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \frac{1}{2}\tilde{T}_0(x).$$

Рассмотрим теперь корни полиномов Чебышева. Согласно общей теореме 8.1 (гл. 2) корни  $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$  полинома  $T_n(x)$  вещественные, различные и лежат в интервале  $(-1, 1)$ . Из равенства

$$T_n(x_k^{(n)}) = \cos(n \arccos x_k^{(n)}) = 0$$

получим

$$n \arccos x_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

и, следовательно,

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.5)$$

Так как степень полинома  $T_n(x)$  равна  $n$ , то числами (1.5) исчерпываются все корни  $T_n(x)$ . Из (1.5) также следует, что, в отличие от общего случая (см. § 8, гл. 2), корни полиномов Чебышева занумерованы в обратном порядке, т.е. имеет место неравенство

$$-1 < x_n^{(n)} < x_{n-1}^{(n)} < \dots < x_k^{(n)} < \dots < x_2^{(n)} < x_1^{(n)} < 1.$$

С помощью формулы (1.5) нетрудно установить взаимное разделение корней полиномов Чебышева. Докажем, что между двумя соседними корнями  $x_k^{(n)}$  и  $x_{k+1}^{(n)}$  полинома  $T_n(x)$  находится один и только один корень  $x_k^{(n-1)}$  полинома  $T_{n-1}(x)$ . В самом деле,

$$x_k^{(n-1)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n-2}.$$

Установим, что

$$x_k^{(n)} > x_k^{(n-1)} > x_{k+1}^{(n)},$$

или, что то же самое в силу монотонности косинуса,

$$\bullet \quad \frac{2k-1}{2n} < \frac{2k-1}{2n-2} < \frac{2k+1}{2n}.$$

Первая часть этого двойного неравенства тривиальна, а вторая равносильна неравенству

$$2k < 2n - 1,$$

вытекающему из того, что  $k < n$ . Так как между  $n$  корнями  $x_k^{(n)}$  имеется  $n-1$  интервалов, каждый из которых содержит по корню полинома  $T_{n-1}(x)$ , то ясно, что в этих интервалах находится ровно по одному корню, ибо корней этих тоже  $n-1$ .

Рассмотрим теперь точки экстремума  $\{\xi_k^{(n)}\}$  полинома  $T_n(x)$ . Из формулы (1.1) следует, что такие точки определяются условиями

$$n \arccos \xi_k^{(n)} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

из которых находим  $n+1$  различных точек

$$\xi_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

Поскольку  $T_n(\xi_k^{(n)}) = (-1)^k$ , то знаки двух соседних экстремумов противоположны, причем точки  $\pm 1$  являются точками экстремума.

Далее, так как точек (1.6)  $n+1$ , то производная  $T_n'(x)$  в интервале  $(-1, 1)$  имеет  $n-1$  корень, и поэтому вне отрезка  $[-1, 1]$  полином Чебышева изменяется монотонно.

С помощью формулы (1.1) легко определяются некоторые частные значения полиномов Чебышева и их производных:

$$T_n(1) = 1, T'_n(1) = n^2, T_n(-1) = (-1)^n, T'_n(-1) = (-1)^n n^2,$$

$$T_{2n}(0) = (-1)^n, T'_{2n}(0) = 0, T_{2n+1}(0) = 0,$$

$$T'_{2n+1}(0) = (2n+1) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Так как старший коэффициент полинома  $T_n(x)$  есть  $2^{n-1}$ , то из формулы (1.3) следует, что старший коэффициент ортонормированного полинома Чебышева  $\hat{T}_n(x)$  имеет вид

$$K_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{n-1}, n \geq 1. \quad (3.7)$$

Все вышесказанное относилось к случаю ортогональности на отрезке  $[-1, 1]$ . Вообще же, можно рассматривать полиномы Чебышева на любом отрезке  $[a, b]$ . Линейное преобразование

$$y = \frac{(b-a)x + (b+a)}{2}$$

переводит точку  $x \in [-1, 1]$  в точку  $y \in [a, b]$ , а полиномы Чебышева  $T_n(x)$  принимают вид

$$T_n\left(\frac{2y - (b+a)}{b-a}\right).$$

## § 2. Дальнейшие свойства полиномов Чебышева

**1. Асимптотические свойства.** Из формул (1.1), (1.3) и (1.4) следуют оценки полиномов Чебышева:

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad x \in [-1, 1],$$

$$|\hat{T}_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$|\tilde{T}_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Рассмотрим некоторые представления и неравенства для полиномов Чебышева и их производных внутри и вне отрезка  $[-1, 1]$ .

С помощью тождества

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \frac{1}{2}[(\cos \theta + i \sin \theta)^n + (\cos \theta - i \sin \theta)^n], \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

полагая  $\theta = \arccos x$ , из формулы (1.1) при  $|x| \leq 1$  найдем представление для полиномов Чебышева:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2} \left[ (x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} i^k (\sqrt{1-x^2})^k [1 + (-1)^k]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поскольку при нечетном  $k$  все слагаемые равны нулю, а при четном — корень исчезает и правая часть является полиномом, то формула (2.1) справедлива при любом  $x$ . Если  $x$  — действительное число, причем

$|x| \leq 1$ , то

$$i^k (\sqrt{1-x^2})^k = (\sqrt{x^2-1})^k,$$

и, следовательно, вместо (2.1) получим формулу:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (\sqrt{x^2-1})^k [1 + (-1)^k] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n \right], \quad |x| > 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.2) имеем неравенство:

$$|T_n(x)| \leq (|x| + \sqrt{x^2-1})^n, \quad |x| \geq 1. \quad (2.3)$$

Отсюда и из (1.3) и (1.4) найдем

$$|\hat{T}_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( |x| + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n, \quad |x| \geq 1,$$

$$|\tilde{T}_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \left( |x| + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n, \quad |x| \geq 1.$$

Покажем теперь, что для производной полинома Чебышева имеет место неравенство

$$|T'_n(x)| \leq n^2, \quad x \in [-1, 1]. \quad (2.4)$$

Действительно, из формулы для синуса суммы двух углов по индукции нетрудно установить неравенство

$$|\sin n\theta| \leq n |\sin \theta|,$$

справедливое при любом  $\theta$ . Дифференцируя (1.1), найдем

$$T'_n(x) = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n^2 \sin \theta}{\sin \theta},$$

откуда и следует (2.4).

**2. Экстремальные свойства.** В 1854 г. П.Л. Чебышев поставил и решил следующую экстремальную задачу: среди всех полиномов степени  $n$  со старшим коэффициентом, равным 1, найти тот, для которого величина

$$\|\tilde{P}_n\|_C = \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{P}_n(x)|$$

является наименьшей. Чебышев доказал, что решением этой задачи является полином  $\tilde{T}_n(x)$ . Справедлива следующая

**Теорема 2.1.** Для всякого полинома  $\tilde{P}_n(x)$  степени  $n$  со старшим коэффициентом, равным 1, имеет место неравенство

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{P}_n(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}},$$

причем знак равенства возможен только в случае  $\tilde{P}_n(x) \equiv \tilde{T}_n(x)$ .

Таким образом, среди всех полиномов степени  $n$  со старшим ко-



эффицентом, равным 1, полином Чебышева  $\tilde{T}_n(x)$  наименее уклоняется от нуля на отрезке  $[-1,1]$ .

Замечателен тот факт, что вне отрезка ортогональности полиномы Чебышева обладают в некотором смысле противоположным экстремальным свойством, а именно, уклоняются от нуля максимально в каждой точке вещественной оси.

**Теорема 2.2.** Если  $P_n(x)$  есть полином степени не выше  $n$ , причем

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| = 1,$$

то при всяком вещественном  $x_0$ ,  $|x_0| > 1$ , выполняется неравенство

$$|P_n(x_0)| \leq |T_n(x_0)|.$$

Отсюда и из оценки (2.3) можно получить неравенство:

$$|P_n(x_0)| \leq |T_n(x_0)| \leq \left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right)^n, \quad |x_0| > 1.$$

Если

$$\max_{x \in [-1,1]} |F_n(x)| = M,$$

то, полагая  $P_n(x) = \frac{1}{M} F_n(x)$ , получим неравенство

$$|F_n(x_0)| \leq M |T_n(x_0)| \leq M \left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1}\right)^n, \quad |x_0| > 1.$$

Таким образом, с помощью полинома Чебышева первого рода  $T_n(x)$  можно оценить полином  $F_n(x)$  в любой точке вне отрезка  $[-1,1]$  через максимум абсолютного значения этого полинома на отрезке  $[-1,1]$ .

Доказательство теорем 2.1 и 2.2 можно найти в [6], гл. III, § 3.

### § 3. Ряды Фурье по полиномам Чебышева

Если функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[-1, 1]$  и интегрируема с весом  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , то ей можно поставить в соответствие ряд Фурье по полиномам Чебышева

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{T}_n(x), \quad (3.1)$$

где коэффициенты Фурье-Чебышева определяются по формулам:

$$a_n = \int_{-1}^1 f(t) \hat{T}_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (3.2)$$

Так как полиномы Чебышева  $\{\hat{T}_n(x)\}$  равномерно ограничены на отрезке  $[-1, 1]$ , то по теореме 9.2 (гл.2) ряд (3.1) сходится к значению  $f(x) \left( \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right)$  в некоторой точке отрезка  $[-1, 1]$ , если эта функция удовлетворяет, например, условию Липшица порядка  $\alpha$ ,  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ , в окрестности этой точки. Используя тригонометрическое представление (1.3) полиномов Чебышева, мы установим сейчас более общий результат.

В интеграле (3.2) сделаем замену  $t = \cos \tau$ . В силу (1.3) получим:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos \tau) \cos n\tau d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \tau) \cos n\tau d\tau, \quad n \geq 1, \quad (3.3)$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos \tau) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \tau) d\tau. \quad (3.3')$$

Введем теперь четную функцию  $F(\theta) = f(\cos \theta)$  и рассмотрим ее ряд Фурье по косинусам

$$F(\theta) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta. \quad (3.4)$$

Легко видеть, что ряды (3.1) и (3.4) почленно тождественны, если  $x = \cos \theta$ . Действительно, из (3.3) и (3.3') имеем:

$$a_n \hat{T}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \tau) \cos n\tau d\tau \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\theta = \alpha_n \cos n\theta, \quad n \geq 1,$$

$$a_0 \hat{T}_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \tau) d\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\alpha_0}{2}.$$

Следовательно, при  $x = \cos \theta$  справедливо равенство

$$f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \hat{T}_k(x) = F(\theta) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos k\theta.$$

Таким образом, вопрос о представлении функции  $f(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  рядом (3.1) сводится к вопросу о сходимости ряда (3.4) четной функции  $F(\theta) = f(\cos \theta)$ . Вопросами о сходимости тригонометрических рядов мы занимались в гл. 1. В частности, согласно признаку Дини-Липшица (§ 11, гл. 1) если модуль непрерывности функции  $F(\theta)$  удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h, F) \ln \frac{1}{h} = 0, \quad (3.5)$$

то эта функция разлагается в ряд Фурье по косинусам

$$F(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta, \quad (3.6)$$

сходящийся равномерно на  $[-\pi, \pi]$ .

**Теорема 3.1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[-1, 1]$  и ее модуль непрерывности на этом отрезке удовлетворяет условию Дини-Липшица

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h, f) \ln \frac{1}{h} = 0, \quad (3.7)$$

то эта функция разлагается в ряд Фурье по полиномам Чебышева

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{T}_n(x),$$

сходящийся равномерно на  $[-1, 1]$ .

*Доказательство.* Пусть  $h > 0$  фиксировано и пусть  $|\theta_1 - \theta_2| \leq h$ . Тогда для  $x_i = \cos \theta_i$ ,  $i = 1, 2$ , имеем

$$|x_1 - x_2| = |\cos \theta_1 - \cos \theta_2| \leq |\theta_1 - \theta_2| \leq h,$$

$$|F(\theta_1) - F(\theta_2)| = |f(\cos \theta_1) - f(\cos \theta_2)| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(h, f).$$

Следовательно, между модулями непрерывности функций  $F(\theta)$  и  $f(x)$  имеет место неравенство

$$\omega(h, F) \leq \omega(h, f).$$

Поэтому из условия (3.7) следует условие (3.5), достаточное для сходимости ряда (3.6) и почленно тождественного ему ряда (3.1).  $\square$

В силу почленного тождества рядов (3.1) и (3.4) аналогично теореме 3.1 можно рассмотреть условия поточечной и абсолютной сходимости ряда (3.1), но для нас это не представляет интереса ввиду аналогии в поведении этих рядов.

**Пример 1.** Разложить функцию  $f(x) = \arccos x$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева на отрезке  $[-1, 1]$ .

*Решение.* Для каждой точки  $x \in (-1, 1)$  найдется такая окрестность  $(x - \delta, x + \delta)$ , в которой функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ . Действительно, по теореме о конечных приращениях

$$|\arccos t - \arccos x| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \delta_1)^2}} |t - x|,$$

где  $(x - \delta, x + \delta) \subset (-1 + \delta_1, 1 - \delta_1)$ .

Далее, функция  $f(x)$  непрерывна всюду на  $[-1, 1]$ . Следовательно, согласно общей теории,  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Чебышева, сходящийся к ней всюду в  $(-1, 1)$ . Введем вспомогательную функцию

$$F(\theta) = \arccos(\cos \theta) = \theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

и разложим ее в ряд Фурье по косинусам на  $[0, \pi]$ . Имеем

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta \, d\theta = \pi,$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi n} [\theta \sin n\theta]_0^\pi - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin n\theta \, d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos \pi n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

откуда, полагая  $\theta = \arccos x$ , найдем

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

причем в точках  $x = \pm 1$  ряд Фурье по полиномам Чебышева функции  $f(x)$  сходится к значениям самой функции, так как ряд Фурье для функции  $F(\theta) = \theta$  сходится к этой функции на всем отрезке  $[0, \pi]$ , а замена  $x = \cos \theta$  непрерывна.

**Пример 2.** Разложить функцию  $f(x) = \arcsin x$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева на отрезке  $[-1, 1]$ .

*Решение.* Аналогично предыдущему примеру, для каждой точки  $x \in (-1, 1)$  найдется такая окрестность  $(x - \delta, x + \delta)$ , в которой функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ . Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$ .

Следовательно,  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Чебышева, сходящийся к ней всюду в  $(-1, 1)$ . Введем вспомогательную функцию

$$F(\theta) = \arcsin(\cos \theta) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos \theta) = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

и разложим ее в ряд Фурье по косинусам на  $[0, \pi]$ . Воспользовавшись результатами примера 1, получим

$$\arcsin(\cos \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

откуда

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(В концах отрезка сходимость имеет место по тем же причинам, что и в примере 1.)

## § 4. Полиномы Чебышева второго рода

При  $x \in [-1, 1]$  из формулы (1.1) следует равенство

$$T'_{n+1}(x) = (n+1) \sin[(n+1) \arccos x] \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (4.1)$$

Следовательно, при любом  $n$  функции

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

являются полиномами. Они называются **полиномами Чебышева второго рода**.

Докажем, что полиномы (4.2) ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  с весом

$$p(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

В самом деле, производя замену  $x = \cos \theta$ , найдем

$$\begin{aligned} J_{nm} &= \int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^\pi \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, для ортонормированных полиномов Чебышева второго рода имеем формулу

$$\bar{U}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Так как в силу (4.1)

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x), \quad (4.4)$$

то нулями полинома  $U_n(x)$  являются точки экстремума полинома  $T_{n+1}(x)$ , которые определяются формулой (1.6) с заменой  $n$  на  $n+1$ . Таким образом, нули  $U_n(x)$  имеют вид

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

так как на концах отрезка  $[-1, 1]$  полином  $T_{n+1}(x)$  имеет краевые экстремумы и его производная там в нуль не обращается.

Из тригонометрического тождества

$$\sin(n+3)\theta + \sin(n+1)\theta = 2\sin(n+2)\theta \cos\theta,$$

полагая в нем  $\theta = \arccos x$  и разделив его почленно на  $\sqrt{1-x^2}$ , получим рекуррентную формулу для полиномов Чебышева второго рода:

$$U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x). \quad (4.5)$$

Так как из (4.2) имеем  $U_0(x) = 1$ ,  $U_1(x) = 2x$ , то с помощью формулы (4.5) найдем:

$$U_0(x) = 1,$$

$$U_1(x) = 2x,$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x,$$

.....

Из рекуррентной формулы (4.5) следует, что старший коэффициент полинома  $U_n(x)$  есть  $2^n$ . Поэтому справедливо равенство



$$\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n=0,1,2,\dots),$$

а рекуррентная формула (4.5) для  $\tilde{U}_n(x)$  принимает вид

$$\tilde{U}_{n+2}(x) = x\tilde{U}_{n+1}(x) - \frac{1}{4}\tilde{U}_n(x).$$

Рассмотрим теперь оценки полиномов Чебышева второго рода. Из формул (4.2) и (4.3) следуют оценки внутри интервала ортогональности:

$$\begin{aligned} |U_n(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1), \\ |\hat{U}_n(x)| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Так как в силу (2.4) при  $x \in [-1, 1]$  справедлива оценка

$|T'_{n+1}(x)| \leq (n+1)^2$ , то из (4.3) и (4.4) найдем:

$$\begin{aligned} |U_n(x)| &\leq (n+1), \quad x \in [-1,1], \\ |\hat{U}_n(x)| &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1), \quad x \in [-1,1]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эти неравенства являются точными, т.е. равенства в них достигаются в концах отрезка  $[-1,1]$ . В самом деле, полагая в (4.2)  $x = \cos \theta$ , преобразуем правую часть к виду

$$U_n(\cos \theta) = (n+1) \frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)\theta} \frac{\theta}{\sin \theta}.$$

Переходя к пределу при  $\theta \rightarrow 0$  при фиксированном  $n$ , получим

$$U_n(1) = n+1.$$

С другой стороны, поскольку каждый полином  $U_n(x)$  содержит степени  $x$  только одной четности с  $n$ , то его значение в точке  $(-1)$  отличается только знаком от значения в 1. Следовательно,

$$U_n(-1) = (-1)^n (n+1).$$

Соответствующие формулы для ортонормированных полиномов Чебышева второго рода имеют вид:

$$\hat{U}_n(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(n+1), \quad \hat{U}_n(-1) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}}(n+1).$$

Таким образом, полиномы Чебышева второго рода на концах отрезка ортогональности возрастают со скоростью  $n$ , а во внутренних точках интервала  $(-1,1)$  эти полиномы ограничены.

Из неравенств (4.6) и (4.7) легко вытекает оценка

$$|\hat{U}_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+1}}, \quad x \in [-1,1],$$

которая показывает, каким образом оценка внутри интервала  $(-1, 1)$  переходит в оценку на его концах.

Отметим интересное экстремальное свойство полиномов Чебышева второго рода, которое впервые установили русские математики А.Н.Коркин<sup>1</sup> и Е.И.Золотарев<sup>2</sup>.

**Теорема 4.1.** Из всех полиномов  $\tilde{P}_n(x)$  степени  $n$  со старшим коэффициентом, равным 1, наименьшее значение интегралу

$$\int_{-1}^1 |\tilde{P}_n(x)| dx$$

<sup>1</sup> А. Н. Коркин (1837-1908). Основной сферой его деятельности были уравнения в частных производных и арифметическая теория квадратичных форм.

<sup>2</sup> Е. И. Золотарев (1847-1878). Полученные им результаты в большинстве своем относятся к теории чисел и алгебре.

доставляет полином  $\tilde{U}_n(x)$ , причем это наименьшее значение равно

$$\frac{1}{2^{n-1}}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \int_{-1}^1 |\tilde{U}_n(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |\tilde{P}_n(x)| dx.$$

Доказательство см. [6], гл. III, § 6.

Перейдем к рассмотрению вопроса об условиях сходимости рядов Фурье по полиномам Чебышева второго рода.

Пусть на отрезке  $[-1, 1]$  задана функция  $f(x)$ , интегрируемая с весом  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Тогда ей в соответствие можно поставить ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{U}_n(x), \quad (4.8)$$

где коэффициенты определяются по формулам:

$$a_n = \int_{-1}^1 f(t) \hat{U}_n(t) \sqrt{1-t^2} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 f(t) \sin[(n+1) \arccos t] dt =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(\cos \tau) \sin[(n+1)\tau] \sin \tau d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

На основании общих результатов § 9 (гл. 2) получим следующий признак:

Если функция  $f(t) \in \tilde{R}_{\sqrt{1-t^2}}^2([-1, 1])$ , а функция

$$\frac{f(t) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}}{t-x} \in \tilde{R}_{\sqrt{1-t^2}}^2([-1, 1]) \text{ при фиксированном } x, \text{ то}$$

ряд (4.8) сходится к  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  в каждой точке  $x$  интервала

$(-1,1)$  (если в точке  $x$  функция  $f(t)$  непрерывна, то  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x)$ ).

Однако, как и для полиномов Чебышева первого рода, здесь можно получить более общий результат.

**Теорема 4.2.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-1,1]$  и ее модуль непрерывности удовлетворяет условию Дини-Липшица (3.7), то ряд (4.8) сходится к  $f(x)$  во всех точках интервала  $(-1,1)$ , причем сходимость этого ряда равномерна на отрезке  $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$  при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную  $2\pi$ -периодическую функцию  $\Phi(\theta) = \sin \theta \cdot f(\cos \theta)$ . Так как при  $|\theta_1 - \theta_2| \leq h$

$$\begin{aligned} |\Phi(\theta_1) - \Phi(\theta_2)| &\leq \\ &\leq |\sin \theta_1 - \sin \theta_2| |f(\cos \theta_1)| + |\sin \theta_2| |f(\cos \theta_1) - f(\cos \theta_2)| \leq \\ &\leq Kh + \omega(h, f), \end{aligned}$$

то модуль непрерывности функции  $\Phi(\theta)$  удовлетворяет условию Дини-Липшица и поэтому  $\Phi(\theta)$  разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье. В силу нечетности функции  $\Phi(\theta)$  имеем:

$$\Phi(\theta) = \sin \theta f(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta, \quad (4.10)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \tau f(\cos \tau) \sin n\tau d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

При условии  $0 < \theta < \pi$  из (4.10) найдем

$$f(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad (4.12)$$

причем полученный ряд сходится равномерно на каждом отрезке  $[\eta, \pi - \eta] \subset (0, \pi)$ . Легко видеть, что при условии  $x = \cos \theta$  ряды (4.8) и (4.12) почленно тождественны. Действительно, в силу (4.3), (4.9) и (4.11) имеем

$$\begin{aligned} a_n \hat{U}_n(x) &= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos \tau) \sin(n+1)\tau \sin \tau d\tau \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= b_{n+1} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (4.8) сходится равномерно на отрезке  $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$  фиксировано.  $\square$

Приведем без доказательства достаточное условие равномерной сходимости ряда (4.8) на всем отрезке  $[-1, 1]$  (см. [6] гл. III, § 6).

**Теорема 4.3.** Если функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[-1, 1]$ , причем  $f'(x)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha > \frac{1}{2}$ , то ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода сходится к  $f(x)$  равномерно на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

**Пример 1.** Разложить функцию  $f(x) = |x|$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

**Решение.** Функция  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(-1, 1)$  и удовлетворяет в нем условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ :

$$|t-x| = |t-x|, \quad t \in (x-\delta, x+\delta).$$

Следовательно,  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода, сходящийся к ней в интервале  $(-1, 1)$ . Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(\theta) = \sin \theta |\cos \theta|, \quad 0 < \theta < \pi,$$

и разложим ее в ряд Фурье по синусам на  $(0, \pi)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \tau |\cos \tau| \sin n\tau \, d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \sin 2\tau \sin n\tau \, d\tau - \int_{\pi/2}^\pi \sin 2\tau \sin n\tau \, d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} (\cos(n-2)\tau - \cos(n+2)\tau) \, d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\pi/2}^\pi (\cos(n-2)\tau - \cos(n+2)\tau) \, d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin \frac{\pi(n-2)}{2}}{n-2} - \frac{\sin \frac{\pi(n+2)}{2}}{n+2} \right] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ 4 \frac{(-1)^{k+1}}{\pi (2k-1)(2k+3)}, & n = 2k+1, \end{cases} \\ &\quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Замечание. Так как при  $n = 2$  числитель и знаменатель дроби в выражении для  $b_n$  обращаются в нуль, то чтобы наши рассуждения были строгими, нужно убедиться, что, действительно,  $b_2 = 0$ . Для этого нуж-

но вычислить интеграл

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \tau |\cos \tau| \sin 2\tau d\tau = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\tau d\tau - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 2\tau d\tau \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\tau) d\tau - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos 4\tau) d\tau \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \pi + \frac{\pi}{2} \right] = 0$$

Таким образом,

$$\Phi(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+3)} \sin(2k+1)\theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Отсюда найдем:

$$f(\cos \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+3)} \frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin \theta}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Наконец, возвращаясь к переменной  $x = \cos \theta$ , получим:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+3)} U_{2k}(x), \quad -1 < x < 1.$$

**Пример 2.** Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ 2x^2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

*Решение.* Функция  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(-1, 1)$ , кроме точки  $x = 0$ , где она имеет разрыв первого рода. На интервалах  $(-1, 0)$  и  $(0, 1)$  она удовлетворяет условию:

$$|f(t) - f(x)| \leq |t - x|, \quad t \in (x - \delta, x + \delta).$$

Действительно, при  $x \in (-1, 0)$  имеем

$$0 \leq |t - x|, \quad t \in (x - \delta, x + \delta),$$

а при  $x \in (0, 1)$  имеем

$$|2t^2 - 2x^2| = 2|(t+x)(t-x)| \leq 4|t-x|, \quad t \in (x - \delta, x + \delta).$$

При  $x = 0$  функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям

$$|f(t) - f(0+0)| \leq |t|, \quad 0 < t < \delta$$

и

$$|f(t) - f(0-0)| \leq |t|, \quad -\delta < t < 0,$$

или, что то же

$$|2t^2| \leq 2|t|, \quad 0 < t < \delta, \text{ и } 0 \leq |t|, \quad -\delta < t < 0.$$

Поэтому в интервале  $(-1, 1)$  функция  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода. Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} 2\cos^2 \theta \sin \theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 2\sin \theta, & \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \end{cases}$$

и разложим ее в ряд Фурье по синусам на  $(0, \pi)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[ 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \tau \sin \tau \sin n\tau d\tau + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \tau \sin n\tau d\tau \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\tau) \sin \tau \sin n\tau d\tau + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \tau \sin n\tau d\tau \right] = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos(n-1)\tau - \cos(n+1)\tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (\cos(n+1)\tau + \cos(n-3)\tau - \right. \\
&\quad \left. - \cos(n+3)\tau - \cos(n-1)\tau) d\tau + \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos(n-1)\tau - \cos(n+1)\tau) d\tau \right] = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin \frac{\pi(n-1)}{2}}{n-1} - \frac{\sin \frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin \frac{\pi(n+1)}{2}}{n+1} + \frac{\sin \frac{\pi(n-3)}{2}}{n-3} - \frac{\sin \frac{\pi(n+3)}{2}}{n+3} - \frac{\sin \frac{\pi(n-1)}{2}}{n-1} \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos \frac{\pi n}{2}}{n-1} + \frac{\cos \frac{\pi n}{2}}{n+1} \right] + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\cos \frac{\pi n}{2}}{n+1} + \frac{\cos \frac{\pi n}{2}}{n-3} + \frac{\cos \frac{\pi n}{2}}{n+3} + \frac{\cos \frac{\pi n}{2}}{n-1} \right] = \\
&= \frac{4 \cos \frac{\pi n}{2}}{\pi} \frac{n(n^2-7)}{(n^2-1)(n^2-9)} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \quad n \neq 1, \quad n \neq 3 \\ \frac{8(-1)^k k(4k^2-7)}{\pi(4k^2-1)(4k^2-9)}, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

Случаи  $n = 1$  и  $n = 3$  рассмотрим отдельно. При  $n = 1$  имеем:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \left[ 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \tau \sin^2 \tau d\tau + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \tau d\tau \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\tau \, d\tau + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \tau \, d\tau \right] = \\
&= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\tau) \, d\tau + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos 2\tau) \, d\tau \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{8} + \pi - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

А при  $n = 3$  имеем:

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{2}{\pi} \left[ 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \tau \sin \tau \sin 3\tau \, d\tau + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \tau \sin 3\tau \, d\tau \right] = \\
&= \frac{4}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos^2 \tau (3 \sin^2 \tau - 4 \sin^4 \tau) \, d\tau + \int_{\pi/2}^{\pi} (3 \sin^2 \tau - 4 \sin^4 \tau) \, d\tau \right] = \\
&= \frac{4}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \left( \frac{3}{4} \sin^2 2\tau - \sin^2 2\tau \sin^2 \tau \right) \, d\tau + \int_{\pi/2}^{\pi} (3 \sin^2 \tau - 4 \sin^4 \tau) \, d\tau \right] = \\
&= \frac{4}{\pi} \left[ \frac{3}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\tau) \, d\tau - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\tau)(1 - \cos 2\tau) \, d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos 2\tau) \, d\tau - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - \cos 2\tau)^2 \, d\tau \right] = \\
&= \frac{4}{\pi} \left[ \frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \right] = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье функции  $\Phi(\theta)$  есть:

$$\Phi(\theta) \sim \frac{5}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k (4k^2 - 7)}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} \sin 2k\theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Следовательно,

$$f(\cos \theta) \sim \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k (4k^2 - 7)}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} \frac{\sin 2k\theta}{\sin \theta}, \quad 0 < \theta < \pi,$$

и возвращаясь к переменной  $x = \cos \theta$ , получим:

$$f(x) \sim \frac{5}{4} + \frac{1}{4} U_2(x) + \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k (4k^2 - 7)}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} U_{2k-1}(x), \quad -1 < x < 1.$$

Согласно общей теории, ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода для функции  $f(x)$  сходится в интервале  $(-1, 1)$  к сумме

$$g(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0, \\ 2x^2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

## § 5. Полиномы Лежандра.

### Основные формулы и алгебраические свойства

**Определение.** Полиномы  $\{X_n(x)\}$ , образующие ортогональную систему веса  $p(x) = 1$  на отрезке  $[-1, 1]$ , называются **полиномами Лежандра**<sup>1</sup>.

Такие полиномы были введены А. М. Лежандром в 1785 году. В 1814 году О. Родригом была установлена для них удобная формула.

Чтобы вывести эту формулу, проинтегрируем  $X_n(x)$   $n$  раз под:

<sup>1</sup> А.М. Лежандр (1752-1833) – французский математик. Известны его результаты в области дифференциальных уравнений, теории чисел, геометрии.

ряд и полученный в результате полином обозначим через  $u_n(x)$ . Его степень будет равна  $2n$ . Выберем постоянные интегрирования так, чтобы оказалось

$$u_n(-1) = u'_n(-1) = \dots = u_n^{(n-1)}(-1) = 0. \quad (5.1)$$

Соотношения (5.1) вместе с равенством  $u_n^{(n)}(x) = X_n(x)$  определяют  $u_n(x)$  с точностью до постоянного множителя.

Обозначим через  $v(x)$  произвольный полином степени ниже  $n$ . Тогда по теореме 7.4 (гл. 2)

$$\int_{-1}^1 u_n^{(n)}(x) v(x) dx = 0. \quad (5.2)$$

Но согласно обобщенной формуле интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u_n^{(n)}(x) v(x) dx = \\ = \left[ u_n^{(n-1)}(x) v(x) - u_n^{(n-2)}(x) v'(x) + \dots + (-1)^{n-1} u_n(x) v^{(n-1)}(x) \right] \Big|_{-1}^1 + \\ + (-1)^n \int_{-1}^1 u_n(x) v^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

С другой стороны,  $v^{(n)}(x) = 0$ , и поэтому из (5.1) и (5.2) вытекает, что

$$u_n^{(n-1)}(1) v(1) - u_n^{(n-2)}(1) v'(1) + \dots + (-1)^{n-1} u_n(1) v^{(n-1)}(1) = 0.$$

Но так как числа  $v(1), v'(1), \dots, v^{(n-1)}(1)$  произвольны (для любых чисел  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  найдется такой полином  $v(x)$  степени ниже  $n$ , что  $v^{(k)}(1) = A_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ); это будет

$$v(x) = A_0 + \frac{A_1}{1!}(x-1) + \dots + \frac{A_{n-1}}{(n-1)!}(x-1)^{n-1},$$

то

$$u_n(1) = u'_n(1) = \dots = u_n^{(n-1)}(1) = 0. \quad (5.3)$$

Равенства (5.1) и (5.3) показывают, что каждая из точек  $\pm 1$  является корнем кратности  $n$  полинома  $u_n(x)$ . Значит, этот полином делится нацело на  $(x-1)^n(x+1)^n = (x^2-1)^n$ , а так как степень  $u_n(x)$  равна  $2n$ , то

$$u_n(x) = K_n(x^2-1)^n$$

и, следовательно,

$$X_n(x) = K_n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}. \quad (5.4)$$

Это и есть **формула Родрига**.

Так как

$$\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} = 2n(2n-1)\dots(n+1)x^n + \dots,$$

то

$$\tilde{X}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}. \quad (5.5)$$

Чтобы найти старший коэффициент  $K_n$  для ортонормированных полиномов  $\hat{X}_n(x)$ , снова применим обобщенную формулу интегрирования по частям, положив  $v(x) = u_n^{(n)}(x)$ . В силу (5.1) и (5.3) все внеинтегральные члены исчезают, и поэтому

$$\int_{-1}^1 \left[ u_n^{(n)}(x) \right]^2 dx = (-1)^n \int_{-1}^1 u_n(x) u_n^{(2n)}(x) dx. \quad (5.6)$$

Но

$$u_n^{(2n)}(x) = K_n(2n)!$$

С другой стороны, полагая

$$I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx,$$

будем иметь

$$I_n = \int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^{n-1} dx - I_{n-1}.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^{n-1} dx = \frac{1}{2n} \int_{-1}^1 x d(x^2 - 1)^n = -\frac{1}{2n} I_n.$$

Значит,

$$I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

Заменяя здесь последовательно  $n$  на  $n-1, n-2, \dots, 1$ , перемножая полученные равенства и замечая, что  $I_0 = 2$ , получим

$$I_n = (-1)^n \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 3} 2 = (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} 2$$

(здесь и далее

$$(2n)!! \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) 2n \quad (2n+1)!! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1).$$

Таким образом, равенство (5.6) принимает вид

$$\int_{-1}^1 X_n^2(x) dx = \frac{(2n)!(2n)!!}{(2n+1)!!} 2K_n^2 = \frac{[(2n)!!]^2}{2n+1} 2K_n^2.$$

Чтобы этот интеграл равнялся единице, надо положить

$$K_n = \frac{1}{(2n)!!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}.$$

Тогда

$$\hat{X}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Согласно общей теории имеет место

**Теорема 5.1.** Все корни полинома  $X_n(x)$  вещественны, различны и лежат в интервале  $(-1, 1)$ .

Из формулы Родрига можно получить явную формулу для  $X_n(x)$ . Именно применяя бином Ньютона, будем иметь

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2n-2k},$$

откуда

$$X_n(x) = K_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} C_n^k x^{n-2k}. \quad (5.7)$$

Из формулы (5.7) видно, что в состав  $X_n(x)$  входят только такие степени  $x$ , показатели которых имеют одинаковую четность с  $n$ .

Отсюда вытекает, что в рекуррентной формуле

$$\tilde{X}_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2}) \tilde{X}_{n+1}(x) - \lambda_{n+1} \tilde{X}_n(x),$$

которая имеет место по общей теории,  $\alpha_{n+2} = 0$ .

Коэффициент  $\lambda_{n+1}$  находится по формуле

$$\lambda_{n+1} = \frac{\int_{-1}^1 \tilde{X}_{n+1}^2(x) dx}{\int_{-1}^1 \tilde{X}_n^2(x) dx} = \frac{2 \frac{[(2n+2)!!]^2}{2n+3} \left[ \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \right]^2}{2 \frac{[(2n)!!]^2}{2n+1} \left[ \frac{n!}{(2n)!} \right]^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Следовательно,

$$\tilde{X}_{n+2}(x) = x\tilde{X}_{n+1}(x) - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \tilde{X}_n(x). \quad (5.8)$$

По формуле Родрига  $\tilde{X}_1(x) = x$ . Кроме того,  $\tilde{X}_0(x) = 1$ . Отсюда и из (5.8) имеем

$$\tilde{X}_0(x) = 1,$$

$$\tilde{X}_1(x) = x,$$

$$\tilde{X}_2(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 1),$$

$$\tilde{X}_3(x) = \frac{1}{5}(5x^3 - 3x),$$

$$\tilde{X}_4(x) = \frac{1}{35}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$\tilde{X}_5(x) = \frac{1}{63}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

.....

Чаще всего рассматривают полиномы  $X_n(x)$ , получающиеся из

(5.4) при  $K_n = \frac{1}{(2n)!!}$ . Мы будем обозначать их  $P_n(x)$ :

$$P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$



Тогда

$$\hat{X}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad \tilde{X}_n(x) = \frac{n!}{(2n-1)!!} P_n(x).$$

Для этих полиномов

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентная формула для них имеет более простой вид:

$$(n+2)P_{n+2}(x) = (2n+3)xP_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x). \quad (5.9)$$

Так как, очевидно,  $P_0(x) = 1$  и  $P_1(x) = x$ , то из (5.9) получим:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

.....

Кроме формул (5.4) и (5.7) можно привести еще одну формулу для  $X_n(x)$ .

По формуле Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

имеем

$$\left[ (x^2 - 1)^n \right]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left[ (x-1)^n \right]^{(n-k)} \left[ (x+1)^n \right]^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!}{k!} (x-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (x+1)^{n-k}.$$

Отсюда

$$X_n(x) = K_n n! \sum_{k=0}^n [C_n^k]^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

В частности,

$$P_n(1) = 1, P_n(-1) = (-1)^n.$$

Из формулы (5.7) также следует, что

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, P_{2n+1}(0) = 0.$$

Отметим еще одно тождество, связывающее три последовательных полинома Лежандра:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x). \quad (5.10)$$

Для его доказательства запишем левую часть в форме

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \left[ \frac{(x^2-1)^{n+1}}{(2n+2)!!} \right]^{(n+1)} - \left[ \frac{(x^2-1)^{n-1}}{(2n-2)!!} \right]^{(n-1)} \right\} = \\ &= \left\{ \left[ \frac{(x^2-1)^{n+1}}{(2n+2)!!} \right]'' - \frac{(x^2-1)^{n-1}}{(2n-2)!!} \right\}^{(n)}. \end{aligned}$$

Но

$$\left[ \frac{(x^2-1)^{n+1}}{(2n+2)!!} \right]'' = \frac{(2n+1)x^2-1}{(2n)!!} (x^2-1)^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\alpha = \left\{ \left[ \frac{(2n+1)x^2 - 1}{(2n)!!} - \frac{1}{(2n-2)!!} \right] (x^2 - 1)^{n-1} \right\}^{(n)} = \frac{2n+1}{(2n)!!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)},$$

что и доказывает (5.10).

## § 6. Интеграл Лапласа и оценки полиномов Лежандра

Рассмотрим функцию

$$y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right]^n d\theta.$$

Так как  $y_0(x) = 1$ ,  $y_1(x) = x$ , то

$$y_0(x) = P_0(x), \quad y_1(x) = P_1(x).$$

Покажем, что при всех  $n$  имеет место равенство  $y_n(x) = P_n(x)$ . Для этого достаточно показать, что три последовательные функции  $y_n(x)$ ,  $y_{n+1}(x)$ ,  $y_{n+2}(x)$  связаны рекуррентным соотношением

$$(n+2)y_{n+2}(x) - (2n+3)xy_{n+1}(x) + (n+1)y_n(x) = 0. \quad (6.1)$$

Положим  $\alpha = x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta$ . Тогда

$$y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \alpha^n d\theta,$$

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right] \alpha^n d\theta,$$

$$y_{n+2}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right]^2 \alpha^n d\theta.$$

Подставляя эти выражения в левую часть (6.1), запишем ее в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \beta \alpha^n d\theta,$$

где

$$\beta = (n+2) \left( x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right)^2 - (2n+3)x \left( x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right) + n+1.$$

После преобразований получим

$$\beta = (n+1)(1-x^2) \sin^2 \theta + i\sqrt{1-x^2} \left( x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right) \cos \theta.$$

Положим

$$\gamma = (n+1)(1-x^2) \sin^2 \theta,$$

$$\delta = i\sqrt{1-x^2} \left( x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right) \cos \theta.$$

Тогда  $\beta = \gamma + \delta$ . Но

$$\int_0^{\pi} \delta \alpha^n d\theta = i\sqrt{1-x^2} \int_0^{\pi} \alpha^{n+1} \cos \theta d\theta.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^{\pi} \delta \alpha^n d\theta = i\sqrt{1-x^2} \left\{ \left[ \alpha^{n+1} \sin \theta \right]_0^{\pi} - (n+1) \int_0^{\pi} \alpha^n \alpha' \sin \theta d\theta \right\}.$$

Так как  $\alpha' = -i\sqrt{1-x^2} \sin \theta$ , то

$$\int_0^{\pi} \delta \alpha^n d\theta = -(n+1)(1-x^2) \int_0^{\pi} \alpha^n \sin^2 \theta d\theta = -\int_0^{\pi} \gamma \alpha^n d\theta.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \beta \alpha^n d\theta = 0,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, полиномы Лежандра допускают интегральное представление

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right]^n d\theta. \quad (6.2)$$

Интеграл (6.2) называется **интегралом Лапласа**<sup>1</sup>.

Так как при  $-1 \leq x \leq 1$

$$\left| x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right| = \sqrt{x^2 + (1-x^2) \cos^2 \theta} \leq 1,$$

то при этих  $x$

$$\left| P_n(x) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| x + i\sqrt{1-x^2} \cos \theta \right|^n d\theta \leq 1.$$

При  $-1 < x < 1$  можно получить более точную оценку:

$$\left| P_n(x) \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(см. [5], ч. 2, гл. V, § 3).

## § 7. Ряды Фурье по полиномам Лежандра

Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[-1, 1]$ , то можно определить коэффициенты Фурье по полиномам Лежандра

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt \quad (7.1)$$

и поставить этой функции в соответствие ряд Фурье по полиномам Лежандра

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \quad (7.2)$$

Согласно общей теории (гл.2, § 9) справедлива

**Теорема 7.1.** Если функция  $f(t) \in \tilde{R}^2([-1, 1])$  и для некоторой

<sup>1</sup> П. Лаплас (1749-1827) – французский физик и математик. Как физик, он знаменит своей работой "Механика неба". В области математики он занимался вопросами математической физики и математической теории вероятностей.

фиксированной точки  $x \in (-1, 1)$  функция

$$\frac{f(t) - \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}}{t - x} \in \tilde{R}^2([-1, 1]), \text{ то ряд (7.2) сходится в точке}$$

$$x \text{ к } \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2} \text{ (к } f(x), \text{ если } f(t) \text{ непрерывна в точке } x).$$

В частности, сходимость ряда (7.2) в точке  $x$  непрерывности функции  $f(t)$  к сумме  $f(x)$  имеет место, если в некоторой окрестности

точки  $x$  функция удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha > \frac{1}{2}$  (см. § 9, гл. 2).

**Теорема 7.2.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$  и ее модуль непрерывности на этом отрезке удовлетворяет условию Дини-Липшица (3.7), то ряд Фурье по полиномам Лежандра сходится к функции  $f(x)$  во всех точках интервала  $(-1, 1)$ , причем сходимость этого ряда равномерна на любом отрезке  $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$ .

**Теорема 7.3.** Если функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[-1, 1]$ , то она разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра, сходящийся равномерно на всем отрезке.

**Теорема 7.4.** Если функция  $f(x)$  удовлетворяет на отрезке  $[-1, 1]$  условию Липшица порядка  $\alpha > \frac{1}{2}$ , то она разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра, сходящийся равномерно на всем отрезке. Доказательство теорем 7.2 – 7.4 можно найти в [6], гл. IV, § 5.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию

$$X(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}.$$

При зафиксированном  $x$  и достаточно малом  $t$  эта функция может быть разложена в ряд по степеням  $t$ :

$$X(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) t^n. \quad (7.3)$$

Полагая  $t = 0$ , найдем  $\alpha_0(x) = 1$ . Дифференцируя (7.3) по  $t$  и снова полагая  $t = 0$ , найдем  $\alpha_1(x) = x$ . Таким образом,

$$\alpha_0(x) = P_0(x), \quad \alpha_1(x) = P_1(x).$$

Покажем, что при любом  $n$  будет  $\alpha_n(x) = P_n(x)$ . Для этого продифференцируем (7.3) по  $t$ :

$$\frac{x-t}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n(x) t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1}(x) t^n.$$

Умножим это равенство на  $1-2tx+t^2$  и заменим в левой части  $(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}$  формулой (7.3):

$$(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) t^n = (1-2tx+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1}(x) t^n.$$

Сравнивая коэффициенты при  $t^n$  ( $n \geq 1$ ), найдем:

$$(n+1) \alpha_{n+1}(x) = (2n-1) x \alpha_n(x) - n \alpha_{n-1}(x) \quad (n \geq 1).$$

Заменяя здесь  $n$  на  $n+1$ , мы получим формулу, имеющую тот же вид, что и рекуррентная формула (5.9). Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (7.4)$$

Функция  $X(t, x)$  называется *производящей функцией* для полиномов Лежандра. Она оказывается очень полезна при разложении функций

в ряд Фурье по полиномам Лежандра.

**Пример 2.** Разложить функцию  $f(x) = \sqrt{1-x}$ ,  $x \in (-1, 1)$  в ряд Фурье по полиномам Лежандра.

*Решение.* Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$ , а ее производная непрерывна на интервале  $(-1, 1)$ , следовательно,

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \in \tilde{R}^2([-1, 1]), \text{ и по теореме 7.1 ряд Фурье функции } f(x)$$

по полиномам Лежандра сходится к ней в каждой точке  $x \in (-1, 1)$ .

Умножим обе части равенства (7.4) на  $\sqrt{1-x}$  и проинтегрируем от  $-1$  до  $1$ . Получим:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 P_n(x) \sqrt{1-x} dx.$$

Законность почленного интегрирования ряда следует из его равномерной сходимости относительно  $x$  на  $[-1, 1]$ , так как  $|P_n(x)| \leq 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,

и ряд мажорируется сходящимся числовым рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ ,  $|t| < 1$ . Имеем:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2t}} \left( 1+t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right).$$

Разложим эту функцию в ряд по степеням  $t$ :

$$\ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} = \ln(1+\sqrt{t}) - \ln(1-\sqrt{t}) =$$



$$\begin{aligned}
& 1 - t \\
& = \left( \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^2}{2} + \frac{(\sqrt{t})^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(\sqrt{t})^n}{n} + \dots \right) - \\
& \quad - \left( -\sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^2}{2} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3} - \dots - \frac{(\sqrt{t})^n}{n} - \dots \right) = \\
& = 2 \left( \sqrt{t} + \frac{(\sqrt{t})^3}{3} + \dots + \frac{(\sqrt{t})^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2t}} \left( 1+t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2t}} \left( 1+t - (1-t)^2 \left( 1 + \frac{t}{3} + \frac{t^2}{5} + \dots + \frac{t^n}{2n+1} + \dots \right) \right) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2t}} \left( 1+t-1 - \frac{t}{3} - \frac{t^2}{5} - \dots - \frac{t^n}{2n+1} + 2t + \frac{2}{3}t^2 + \dots + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{2n+1}t^{n+1} - t^2 - \frac{t^3}{3} - \dots - \frac{t^{n+2}}{2n+1} - \dots \right) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} \right),
\end{aligned}$$

откуда

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x} P_0(x) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x} P_n(x) dx = -\frac{4\sqrt{2}}{(4n^2-1)(2n+3)}.$$

Отсюда, в силу (7.1), получим:

$$\sqrt{1-x} = \frac{2}{3} \sqrt{2} P_0(x) - 2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}.$$

**Пример 3.** Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < a, \\ 1, & a < x \leq 1. \end{cases} \quad (-1 < a < 1)$$

в ряд по полиномам Лежандра.

*Решение.* По формуле (5.10) имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2} \int_a^1 P_n(x) dx = \frac{1}{2} \left[ \int_a^1 P'_{n+1}(x) dx - \int_a^1 P'_{n-1}(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} [P_{n-1}(a) - P_{n+1}(a)], \quad a_0 = \frac{1}{2}(1-a). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{1}{2}(1-a) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n-1}(a) - P_{n+1}(a)] P_n(x).$$

В точке разрыва  $x = a$  частная сумма имеет вид

$$S_n(a) = \frac{1}{2}(1-a) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [P_{k-1}(a) - P_{k+1}(a)] P_k(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P_{n+1}(a) P_n(a).$$

Так как  $P_n(a) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд в точке  $a$  сходится к

$$\frac{f(a-0) + f(a+0)}{2}.$$

## § 8. Полиномы Лагерра и Эрмита

До сих пор мы рассматривали полиномы, ортогональные на конечном отрезке. Тогда мы предполагали, что весовая функция  $p(x)$  удовлетворяет условиям §1, гл.2.

В настоящем параграфе мы рассмотрим полиномы, ортогональные на бесконечном промежутке  $(a, b)$ . Чтобы теория, изложенная нами в гл.2, оставалась справедливой и в этом случае, будем дополнительно предполагать, что абсолютно сходятся интегралы

$$\mu_n = \int_a^b p(x) x^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**1. Полиномы Лагерра**<sup>1</sup> – это полиномы, образующие на промежутке  $[0, +\infty)$  ортогональную систему веса  $p(x) = e^{-x}$ . Они определяются (с точностью до постоянного множителя) формулой

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

В частности,

$$\tilde{L}_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}),$$

а

$$\hat{L}_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Рекуррентная формула для полиномов  $\tilde{L}_n(x)$  имеет вид:

$$\tilde{L}_{n+2}(x) = [x - (2n + 3)] \tilde{L}_{n+1}(x) - (n + 1)^2 \tilde{L}_n(x).$$

Так как  $\tilde{L}_0(x) = 1$ ,  $\tilde{L}_1(x) = x - 1$ , то

<sup>1</sup> Э. Лагерр (1834-1886) – французский математик.

$$\begin{aligned}\tilde{L}_2(x) &= x^2 - 4x + 2, \\ \tilde{L}_3(x) &= x^3 - 9x^2 + 18x - 6, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Пусть функция  $f(x) \in \tilde{R}_{e^{-x}}^2([0, +\infty))$  (все интегралы понимаются в несобственном смысле). Ей ставится в соответствие ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{L}_n(x), \quad (8.1)$$

где коэффициенты определяются формулой

$$a_n = \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) \hat{L}_n(t) dt.$$

Справедлива

**Теорема 8.1.** Если функция  $f(x) \in \tilde{R}_{e^{-x}}^2([0, +\infty))$  является кусочно-дифференцируемой в любом интервале  $(0, a)$ ,  $a > 0$ , то ее ряд Фурье по полиномам Лагерра (8.1) сходится при  $0 < x < \infty$  и его сумма равна  $f(x)$  в точке непрерывности этой функции и  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  в точке ее разрыва.

**2. Полиномы Эрмита**<sup>1</sup> образуют ортогональную систему веса  $p(x) = e^{-x^2}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Они определяются (с точностью до постоянного множителя) формулой

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

В частности,

<sup>1</sup> Ш. Эрмит (1822-1901) – французский математик, доказал, что число  $e$  трансцендентно. Известны его результаты в области алгебры и теории функций комплексного переменного.

$$\tilde{H}_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n H_n(x),$$

а

$$\hat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x).$$

Рекуррентная формула для полиномов Эрмита имеет вид:

$$\tilde{H}_{n+2}(x) = x\tilde{H}_{n+1}(x) - \frac{n+1}{2}\tilde{H}_n(x).$$

Откуда

$$\tilde{H}_0(x) = 1,$$

$$\tilde{H}_1(x) = x,$$

$$\tilde{H}_2(x) = x^2 - \frac{1}{2},$$

$$\tilde{H}_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x,$$

.....

Пусть функция  $f(x) \in \tilde{R}_{e^{-x^2}}^2((-\infty, +\infty))$  (все интегралы понимаются в несобственном смысле). Ей ставится в соответствие ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{H}_n(x), \quad (8.2)$$

где коэффициенты определяются формулой

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) \hat{H}_n(t) dt.$$

**Теорема 8.2.** Если функция  $f(x) \in \tilde{R}_{e^{-x^2}}^2((-\infty, +\infty))$  является кусочно-дифференцируемой в любом интервале  $(-a, a)$ , то ее ряд Фу-



**Лагранжа**<sup>1</sup>, соответствующим системе узлов (9.1) и функции  $f(x)$ .

Найдем формулу для  $L_n(x; f)$ . Рассмотрим сначала **фундаментальные полиномы Лагранжа**:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \quad (9.4)$$

Для этих полиномов выполняются условия

$$l_k(x_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases} \quad (9.5)$$

С помощью фундаментальных полиномов (9.4) интерполяционный полином Лагранжа представляется в виде:

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x). \quad (9.6)$$

Точки (9.1) называются **узлами интерполяции**. Они определяют полином

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

с помощью которого числитель (9.4) можно записать короче

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{x-x_k}.$$

• Но

$$\begin{aligned} (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\omega_{n+1}(x) - \omega_{n+1}(x_k)}{x - x_k} = \omega'_{n+1}(x_k). \end{aligned}$$

Следовательно, формулы (9.4) и (9.6) можно представить в виде

$$l_k(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (9.7)$$

<sup>1</sup> Л. Лагранж (1736-1813) – французский математик. В математическом анализе его имя носит остаточный член в формуле Тейлора. С именем Лагранжа также связаны значительные результаты в алгебре и вариационном исчислении.

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)}. \quad (9.8)$$

Интерполяционный полином Лагранжа совпадает с функцией  $f(x)$  в узлах интерполяции (9.1), в других же точках отрезка  $[a, b]$  такого совпадения может и не быть. Но этот полином вводится именно для того, чтобы было легче подсчитать значения сложной функции  $f(x)$  в любой точке отрезка  $[a, b]$ . В связи с этим возникает естественный вопрос о погрешности приближенного равенства

$$f(x) \approx L_n(x; f), \quad x \in [a, b]. \quad (9.9)$$

Иначе говоря, в формуле

$$f(x) = L_n(x; f) + R_n(x; f), \quad x \in [a, b], \quad (9.10)$$

требуется оценить остаточный член  $R_n(x; f)$ .

Если функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема  $n+1$  раз на отрезке  $[a, b]$ , то

$$f(x) = L_n(x; f) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (9.11)$$

$$R_n(x; f) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad x \in [a, b], \quad (9.12)$$

где  $\xi \in [a, b]$  – точка, зависящая от  $x$ .

Обозначим через  $M_{n+1}(f)$  максимум величины  $|f^{(n+1)}(x)|$  на  $[a, b]$ . Тогда из (9.12) найдем:

$$|R_n(x; f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}(f) \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|. \quad (9.13)$$



Чтобы правая часть была наименьшей, надо выбрать узлы (9.1) наилучшим образом, т.е. так, чтобы полином

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

наименее уклонялся от нуля на отрезке  $[a, b]$ .

В случае отрезка  $[-1, 1]$  вопрос о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля, уже изучен (см. § 2). Полиномом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ , является полином Чебышева  $\tilde{T}_{n+1}(x)$ .

Следовательно, в случае отрезка  $[-1, 1]$  величина (9.13) будет наименьшей, а приближенная формула (9.9) будет наиболее точной, если в качестве узлов интерполяции (9.1) выбрать нули полинома Чебышева первого рода  $\tilde{T}_{n+1}(x)$ . В этом случае неравенство (9.13) приводится к виду (см. § 2):

$$|R_n(x; f)| \leq \frac{1}{(n+1)!2^n} M_{n+1}(f), \quad x \in [-1, 1].$$

Аналогичные утверждения имеют место и в случае произвольного отрезка  $[a, b]$ , так как этот отрезок сводится к  $[-1, 1]$  линейным преобразованием  $2x = (b - a)y + a + b$ , а вместо полиномов  $\tilde{T}_{n+1}(x)$  надо рассматривать смещенные полиномы Чебышева.

Вернемся к общему случаю и рассмотрим вопрос о сходимости интерполяционного процесса.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана бесконечная треугольная матрица узлов:

$$\begin{aligned} & x_0^{(0)}, \\ & x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \\ & x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \\ & \dots\dots\dots \\ & x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

Для каждой строки этой матрицы можно построить интерполяционный полином Лагранжа. В результате получим последовательность полиномов

$$L_0(x; f), L_1(x; f), \dots, L_n(x; f), \dots$$

и возникает естественный вопрос об условиях, при которых имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x; f) = f(x). \quad (9.15)$$

Ясно, что выполнение условия (9.15) зависит от расположения узлов (9.14) на отрезке  $[a, b]$  и от свойств функции  $f(x)$ . Справедлива

**Теорема 9.1.** Если матрица узлов (9.14) состоит из нулей полиномов Чебышева первого рода, а функция  $f(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  удовлетворяет условию Дини-Липшица (3.7), то последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа сходится к функции  $f(x)$  равномерно на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

**2. Квадратурные формулы интерполяционно-ортогонального типа.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана весовая функция  $p(x)$  и система узлов

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (9.16)$$

Предположим, что по некоторому правилу данному отрезку, весовой функции и узлам (9.16) ставится в соответствие система весов

$$A_1, A_2, \dots, A_n. \quad (9.17)$$

Тогда для всякой функции  $f(x)$ , определенной на отрезке  $[a, b]$ , можно рассматривать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (9.18)$$

По этой приближенной формуле удобно считать интеграл, так как веса

(9.17) на зависят от конкретной функции  $f(x)$  и для вычисления квадратурной суммы (9.18) достаточно вычислить значения функции  $f(x)$  в точках (9.16). Здесь сразу же возникает вопрос о величине погрешности приближенного равенства (9.18). Для изучения этого вопроса рассмотрим квадратурную формулу с остаточным членом:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f). \quad (9.19)$$

Считая, что отрезок  $[a, b]$  и весовая функция на нем зафиксированы, можно варьировать узлы (9.16) и веса (9.17) таким образом, чтобы остаточный член  $R_n(f)$  был минимальным, если функция  $f(x)$  удовлетворяет определенным условиям, т.е. принадлежит некоторому классу  $W$ .

Аналогично интерполяционным процессам можно рассматривать условия сходимости квадратурных процессов. Пусть аналогично (9.14)

заданы две бесконечные треугольные матрицы  $\|x_k^{(n)}\|$  и  $\|A_k^{(n)}\|$ . Тогда для каждой пары строк получим последовательность квадратурных сумм вида (9.18) и естественно поставить вопрос об условиях, при которых справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x)f(x)dx$$

для произвольной функции из данного класса  $W$ .

Мы рассмотрим подробнее **квадратуры интерполяционно-ортогонального типа** или **квадратуры типа Гаусса**<sup>1</sup>. Это квадратурные формулы, в которых узлами являются нули полиномов, ортогональных с весом  $p(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

Сначала изучим квадратуры интерполяционного типа.

Пусть узлы (9.16) выбраны произвольно и зафиксированы. Рассмотрим интерполяционную формулу Лагранжа с остаточным членом

<sup>1</sup> К. Ф. Гаусс (1777-1855) – немецкий физик и математик. Ему принадлежит доказательство основной теоремы алгебры и термин “комплексное число”. Известны его результаты в области теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятностей.

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega'_n(x_k)} + R_{n-1}(x; f).$$

Умножим это равенство почленно на вес и проинтегрируем. В результате получим формулу

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b \frac{p(x) \omega_n(x) dx}{(x-x_k) \omega'_n(x_k)} + R_n(f), \quad (9.20)$$

где остаточный член имеет вид

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) R_{n-1}(x; f) dx. \quad (9.21)$$

При некоторых условиях остаточный член  $R_{n-1}(x; f)$  есть малая величина. Поэтому при тех же условиях интеграл (9.21) также мал и интегралы в правой части (9.20) можно принять в качестве весов квадратурной формулы, т.е. положить

$$A_k = \int_a^b \frac{p(x) \omega_n(x)}{(x-x_k) \omega'_n(x_k)} dx, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При таком выборе весов квадратурная формула называется **интерполяционной**.

Квадратурная формула является **точной** для некоторой функции  $F(x)$ , если для этой функции остаточный член равен нулю, т.е.

$$\int_a^b p(x) F(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k F(x_k).$$

**Теорема 9.2.** Для того чтобы квадратурная формула (9.18) была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной для любого полинома степени не выше  $n-1$ .

**Пример.** Одним из простейших примеров интерполяционных квадратурных формул является *формула трапеций*. Пусть  $p(x) \equiv 1$ ,  $n = 2$ , а узлами служат концы отрезка  $[a, b]$ . Тогда полином Лагранжа будет

$$L(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Так как

$$\int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{b-a}{2},$$

то формула (9.18) принимает вид

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (9.22)$$

Очевидно, формула (9.22) точна для всех полиномов степени не выше 1.

Пусть теперь  $\{P_n(x)\}$  есть последовательность полиномов, ортогональных на отрезке  $[a, b]$  с весовой функцией  $p(x)$ . Положим

$$\omega_n(x) = P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

т.е. в качестве узлов (9.16) выбираются корни ортогонального полинома. Тогда

$$A_k = \int_a^b \frac{p(x)P_n(x)}{(x-x_k)P_n'(x_k)} dx, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

В этом случае, как уже было отмечено, равенство (9.18) называется квадратурной формулой интерполяционно-ортогонального типа (квадратурной формулой типа Гаусса).

**Теорема 9.3.** Для того чтобы квадратурная формула порядка  $n$  была интерполяционно-ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной для всякого полинома степени не выше  $2n-1$ .

**Пример 1. Формула Гаусса.** Если  $p(x) \equiv 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ , то узлами квадратурной формулы типа Гаусса будут корни полинома Лежандра  $X_n(x)$ . Обозначая эти корни через  $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ , получим формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)}),$$

где

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{X_n'(\xi_k^{(n)})} \int_{-1}^1 \frac{X_n(x)}{x - \xi_k^{(n)}} dx.$$

Кристоффель нашел весьма простые выражения для коэффициентов  $A_k^{(n)}$  формулы Гаусса. Рассмотрим полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \hat{X}_n(x).$$

Тогда

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{1 - [\xi_k^{(n)}]^2} \frac{1}{[P_n'(\xi_k^{(n)})]^2}.$$

**Пример 2. Формула Эрмита.** Пусть  $a = -1$ ,  $b = 1$  и

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . В этом случае за узлы (9.16) следует принять корни

полинома Чебышева  $T_n(x)$ . Эти корни суть

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда коэффициенты квадратурной формулы будут

$$A_k = \frac{1}{T_n'(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{x - x_k} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

и после вычислений получим

$$A_k = \frac{\pi}{n}.$$

Таким образом, квадратурная формула Эрмита имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right).$$

Более подробно материал § 9 изложен в книгах [6], гл. VIII, §§ 2-3, и [5], ч.3.

## ГЛАВА 4. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

### § 1. Задача Штурма-Лиувилля для дифференциальных операторов второго порядка. Основные понятия

**Определение.** Краевая задача

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (l(x) - \lambda r(x))y = 0, \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $p(x)$  и  $r(x)$  положительные, а  $l(x)$  действительная функции,  $x \in (a, b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , называется **задачей Штурма-Лиувилля**<sup>1</sup>.

Если функция  $p(x)$  непрерывно дифференцируема, а функция  $p(x)r(x)$  дважды непрерывно дифференцируема, то уравнение (1.1) можно привести к виду

$$-\frac{d^2 u}{dz^2} + q(z)u = \mu u$$

и с помощью подстановок

$$z = \frac{1}{c} \int_a^x \left( \frac{r(x)}{p(x)} \right)^{\frac{1}{2}} dx, \quad u(z) = (r(x)p(x))^{\frac{1}{4}} y(x), \quad \mu = c\lambda,$$

$$q(z) = \frac{\vartheta''(z)}{\vartheta(z)} + c^2 \frac{l(x)}{r(x)}, \quad \vartheta(z) = (r(x)p(x))^{\frac{1}{4}},$$

где  $c = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left( \frac{r(x)}{p(x)} \right)^{\frac{1}{2}} dx$  – постоянная величина. При этом интервал  $(a, b)$

<sup>1</sup> Ж.Ш. Штурм (1803-1855) – немецкий математик. Ж. Лиувиль (1809-1882) – французский математик. Доказал существование трансцендентных чисел.



преобразуется в  $(0, \pi)$ , а краевые условия своего вида не меняют.

Без ограничения общности можно считать, что  $a = 0$ ,  $b = \pi$ , так как линейная замена  $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$  преобразует интервал  $(a, b)$  в интервал  $(0, \pi)$ , не меняя при этом вида краевой задачи (1.1) – (1.2).

В дальнейшем мы будем рассматривать задачу Штурма-Лиувилля вида

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (a, b) \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha y(a) + \sin \alpha y'(a) = 0, \\ \cos \beta y(b) + \sin \beta y'(b) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Если функция  $q(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то задача (1.3)–(1.4) называется **регулярной**. Если же функция  $q(x)$  не интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то задача (1.3)–(1.4) называется **сингулярной**. Задача Штурма-Лиувилля также называется сингулярной, если промежутот  $(a, b)$  бесконечен, но мы этот случай рассматривать не будем ввиду его сложности.

Предположим, что при некотором  $\lambda_0$  задача (1.3) – (1.4) имеет решение  $y(x, \lambda_0)$ , не равное тождественно нулю. Тогда  $\lambda_0$  – **собственное значение**, а  $y(x, \lambda_0)$  – **собственная функция** задачи (1.3)–(1.4).

Известны (см. [8], гл. II, § 2) следующие свойства:

**Лемма 1.1.** Собственные функции  $y(x, \lambda_1)$  и  $y(x, \lambda_2)$ , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, т.е.

$$\int_a^b y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

**Лемма 1.2.** Собственные значения задачи (1.3)–(1.4) действительны.

**Лемма 1.3.** Если функция  $q(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то задача (1.3)–(1.4) имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.4.** Если функция  $q(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то для любого  $\alpha$  существует единственное решение  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $a \leq x \leq b$ , уравнения (1.3) такое, что

$$\varphi(a, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'_x(a, \lambda) = -\cos \alpha. \quad (1.5)$$

*Доказательство.* Положим  $\varphi_0(x, \lambda) = \sin \alpha - (x - a) \cos \alpha$ , и пусть для  $n > 0$

$$\varphi_n(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \int_a^x [q(t) - \lambda] \varphi_{n-1}(t, \lambda) (x - t) dt.$$

Так как  $q(x)$  непрерывна, то она ограничена, т.е.  $|q(x)| < M$ ,  $a \leq x \leq b$ . Пусть  $|\lambda| < N$ . Тогда  $|\varphi_0(x, \lambda)| < K$  при  $a \leq x \leq b$  и

$$|\varphi_1(x, \lambda) - \varphi_0(x, \lambda)| \leq \int_a^x (M + N) K (x - t) dt = \frac{1}{2} (M + N) K (x - a)^2.$$

Далее, для  $n \geq 2$  получаем

$$|\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)| = \left| \int_a^x [q(t) - \lambda] \{ \varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda) \} (x - t) dt \right| \leq$$

$$\leq (M + N)(b - a) \int_a^x |\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)| dt \leq \dots$$

$$\dots \leq \frac{K(M + N)^n (b - a)^{n-1} (x - a)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Следовательно, ряд

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n(x, \lambda) - \varphi_{n-1}(x, \lambda)\} \quad (1.6)$$

сходится равномерно по  $\lambda$  для  $|\lambda| < N$  и равномерно по  $x$  для  $a \leq x \leq b$ . Так как при  $n \geq 2$

$$\varphi'_n(x, \lambda) - \varphi'_{n-1}(x, \lambda) = \int_a^x [q(t) - \lambda] \{\varphi_{n-1}(t, \lambda) - \varphi_{n-2}(t, \lambda)\} dt,$$

$$\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda) = [q(x) - \lambda] \{\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)\},$$

то ряды, полученные однократным и двукратным дифференцированием ряда (1.6), также сходятся равномерно по  $x$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi''(x, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda)\} = \\ &= \varphi''_1(x, \lambda) - \varphi''_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\varphi''_n(x, \lambda) - \varphi''_{n-1}(x, \lambda)\} = \\ &= [q(x) - \lambda] \left\{ \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \{\varphi_{n-1}(x, \lambda) - \varphi_{n-2}(x, \lambda)\} \right\} = \\ &= [q(x) - \lambda] \varphi(x, \lambda). \end{aligned}$$

и, значит,  $\varphi(x, \lambda)$  удовлетворяет уравнению (1.3). Непосредственно проверяется, что  $\varphi(x, \lambda)$  удовлетворяет начальным условиям (1.5).

## § 2. Разложения по собственным функциям регулярной задачи Штурма-Лиувилля. Полнота системы собственных функций

Пусть функция  $q(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , и  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  – все собственные значения задачи (1.3)–(1.4). Пусть далее

$$y(x, \lambda_0), y(x, \lambda_1), \dots, y(x, \lambda_n), \dots \quad (2.1)$$

– соответствующие им собственные функции, которые для простоты мы будем предполагать нормированными, т.е.

$$\int_a^b y^2(x, \lambda_n) dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда для всякой абсолютно интегрируемой на  $[a, b]$  функции  $f(x)$  можно составить **ряд Фурье по функциям системы** (2.1):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n y(x, \lambda_n),$$

где

$$c_n = \int_a^b f(x) y(x, \lambda_n) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Справедливы следующие предложения, которые мы приведем без доказательства.

**Теорема 2.1.** Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , обладает кусочно-непрерывными производными до второго порядка и удовлетворяет граничным условиям задачи (1.3)–(1.4):

$$\begin{cases} \cos \alpha f(a) + \sin \alpha f'(a) = 0, \\ \cos \beta f(b) + \sin \beta f'(b) = 0, \end{cases}$$

то ряд Фурье по собственным функциям сходится к  $f(x)$  абсолютно и

равномерно.

**Теорема 2.2.** Если  $f(x)$  кусочно непрерывна на  $[a, b]$  и обладает кусочно-непрерывными производными до второго порядка, то ряд Фурье по собственным функциям сходится для  $a < x < b$  к сумме  $f(x)$

в каждой точке непрерывности и к сумме  $\frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$  в каждой точке разрыва.

Покажем теперь, что система собственных функций (2.1) задачи (1.3) – (1.4) полна. Для этого нам достаточно установить (см. § 6, гл.2), что для любой функции  $f(x)$ , интегрируемой с квадратом на  $[a, b]$ , выполнено равенство Парсеваля

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2, \quad (2.2)$$

где  $c_n$  – коэффициенты Фурье по системе (2.1).

Всякую непрерывную функцию  $F(x)$  можно с любой степенью точности аппроксимировать в среднем квадратичном с помощью функции  $g(x)$  с двумя непрерывными производными, удовлетворяющей граничным условиям краевой задачи (1.3)–(1.4). Можно, например, в качестве  $g(x)$  брать функции, для которых  $g(a) = g'(a) = g(b) = g'(b) = 0$ . Пусть

$$\int_a^b [F(x) - g(x)]^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon > 0$  – произвольно мало.

По теореме 2.1 ряд Фурье по системе (2.1) сходится к  $g(x)$  равномерно. Следовательно, существует полином

$$\sigma_n(x) = a_0 y(x, \lambda_0) + a_1 y(x, \lambda_1) + \dots + a_n y(x, \lambda_n), \quad (2.4)$$

для которого

$$|g(x) - \sigma_n(x)| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi}} \quad (a \leq x \leq b).$$

Отсюда

$$\int_a^b [g(x) - \sigma_n(x)]^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.5)$$

В силу элементарного неравенства

$$(A + B)^2 \leq 2(A^2 + B^2)$$

из (2.3) и (2.5) вытекает

$$\begin{aligned} \int_a^b [F(x) - \sigma_n(x)]^2 dx &= \int_a^b [\{F(x) - g(x)\} + \{g(x) - \sigma_n(x)\}]^2 dx \leq \\ &\leq 2 \left\{ \int_a^b [F(x) - g(x)]^2 dx + \int_a^b [g(x) - \sigma_n(x)]^2 dx \right\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что любая непрерывная функция с любой степенью точности может быть аппроксимирована в среднем квадратичном многочленами вида (2.4). Но тогда согласно теореме 6.5 (гл. 2) система (2.1) является замкнутой, т.е. для всякой функции  $f(x)$ , интегрируемой с квадратом на  $[a, b]$ , выполнено равенство Парсеваля (2.2). Но, как мы знаем (теорема 6.3, гл. 2), замкнутая система полна. Поэтому доказана

**Теорема 2.3.** Система (2.1) собственных функций задачи (1.3)–(1.4) полна.

Из замкнутости системы (2.1) и теоремы 6.1 (гл. 2) вытекает

**Теорема 2.4.** Для всякой функции  $f(x)$ , интегрируемой с квадратом на  $[a, b]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k y(x, \lambda_k) \right]^2 dx = 0,$$

где  $c_k$  – коэффициенты Фурье по системе (2.1). Иначе говоря, ряд Фурье всегда сходится к  $f(x)$  в среднем.

### § 3. Сингулярная задача Штурма-Лиувилля. Частные случаи

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров сингулярных задач Штурма-Лиувилля.

**1. Функции Бесселя как собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувилля.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{p^2}{x}y = \lambda xy, \quad x \in (0, 1]. \quad (3.1)$$

Это уравнение типа (1.1) с  $p(x) = x$ ,  $l(x) = \frac{p^2}{x}$ ;  $r(x) = x$ . С помощью преобразования, описанного в § 1, оно приводится к виду

$$-u'' + \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{z^2}u = \lambda u, \quad z \in (0, \pi]. \quad (3.2)$$

Мы видим, что  $q(z) = \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{z^2} \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow 0$ . Поэтому, задав кра-

евые условия:

$u(z)$  ограничена при  $z \rightarrow 0$ ,

$$\tilde{\alpha} u(\pi) + \tilde{\beta} u'(\pi) = 0,$$

мы получим сингулярную задачу Штурма-Лиувилля.

Впрочем, вместо уравнений (3.1) или (3.2) обычно рассматривают уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (3.3)$$

которое получается из (3.1) заменой  $\tilde{x} = \sqrt{\lambda}x$  (для простоты обозначе-

ний новую переменную  $\tilde{x}$  мы снова обозначили через  $x$ ). Вообще говоря, новая переменная  $x$  будет комплексной, но мы будем рассматривать только случай  $\lambda > 0$ . Уравнение (3.3) называется **уравнением Эйлера-Бесселя**, а его решения – **бесселевыми функциями**. Число  $p$  называется **индексом** уравнения (3.3).

Так как уравнение (3.3) линейно, то его общий интеграл может быть записан в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  – два любых линейно независимых частных решения уравнения (3.3),  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Таким образом, чтобы найти общий интеграл уравнения (3.3), достаточно найти два каких-нибудь линейно независимых его решения.

Пусть  $p \geq 0$ . Будем искать решение уравнения (3.3) в виде

$$y(x) = x^p z(x).$$

Тогда

$$y' = px^{p-1}z + x^p z', \quad y'' = p(p-1)x^{p-2}z + 2px^{p-1}z' + x^p z''$$

и уравнение (3.3) преобразуется к виду:

$$z'' + \frac{2p+1}{x} z' + z = 0. \quad (3.4)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде степенного ряда

$$z(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Вычисления дают:

$$z' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (n+2)a_{n+2} x^{n+1} + \dots,$$

$$z'' = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \dots + (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \dots$$

Подставив полученные ряды в (3.4), найдем:



$$\frac{2p+1}{x}a_1 + [2a_2 + (2p+1)2a_2 + a_0] + [2 \cdot 3a_3 + (2p+1)3a_3 + a_1]x + \dots \\ + [(n+1)(n+2)a_{n+2} + (2p+1)(n+2)a_{n+2} + a_n]x^n + \dots = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях  $x$ , получим:

$$a_1 = 0,$$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (2p+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

или

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(2p+n+2)(n+2)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{2m-1} = \dots = 0,$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2p+2)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2p+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)},$$

.....

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m(2p+2)(2p+4)(2p+6) \dots (2p+2m)} = \\ = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m! (p+1)(p+2)(p+3) \dots (p+m)}.$$

Таким образом, решение уравнения (3.4) дается рядом

$$z(x) = a_0 \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m} m! (p+1)(p+2)(p+3) \dots (p+m)} \right\},$$

где  $a_0$  – постоянная, которую можно выбрать произвольно.

По признаку Даламбера полученный ряд сходится при всех  $x$ . Поэтому законно его почленное дифференцирование (внутри интервала сходимости) и  $z(x)$  действительно является решением уравнения (3.4). Но тогда функция

$$y(x) = a_0 x^p \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{2^{2m} m! (p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+m)} \right\} \quad (3.5)$$

при любом значении  $a_0$  будет решением уравнения (3.3).

Рассмотрим  $\Gamma$ -функцию,

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx, \quad p > 0. \quad (3.6)$$

Она обладает следующими свойствами:

- 1)  $\Gamma(1) = 1$ ,
- 2)  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ ,
- 3)  $\Gamma(p+1) = p!$ , если  $p$  – целое, положительное.

С помощью свойства 2) функцию  $\Gamma(p)$  можно распространить на все значения  $p$ . Для этого полагаем при  $-1 < p < 0$  по определению

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \quad (3.7)$$

(правая часть имеет смысл, так как  $0 < p+1 < 1$ ). Далее, при  $-2 < p < -1$  имеем  $-1 < p+1 < 0$ , и правая часть в формуле (3.7) уже определена.

Продолжая этот процесс, мы определим  $\Gamma(p)$  для всех отрицательных значений  $p$ . В частности, из построения следует свойство

- 4)  $\Gamma(p) = \infty$  для  $p = 0, -1, -2, \dots$

Положим

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}.$$

Тогда ряд (3.5) определяет **бесселеву функцию первого рода** индекса  $p \geq 0$ :

$$J_p(x) = \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{m!(p+1)(p+2)(p+3)\dots(p+m)\Gamma(p+1)} \right\},$$

которую, пользуясь свойствами  $\Gamma$ -функции, можно переписать в более простом виде:

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)}. \quad (3.8)$$

В частности,

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}, \quad J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{m!(m+1)!}.$$

Вообще при целом положительном  $p$

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{m!(p+m)!}.$$

Отсюда видно, что при целых четных  $p$  функция  $J_p(x)$  четная, а при целых нечетных  $p$  функция  $J_p(x)$  нечетная.

Применяя рассуждения, проведенные выше, к  $-p$ , мы также получим решение уравнения (3.3). Заменяя в (3.8)  $p$  на  $-p$ , получим:

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-p+m+1)}. \quad (3.9)$$

Заметим, что при целом  $p$  для  $m = 0, 1, 2, \dots, p-1$  величина  $-p+m+1$  пробегает целые отрицательные значения и нуль. Поэтому для этих  $m$  будет  $\Gamma(-p+m+1) = \infty$  и, следовательно, для целых  $p$

$$\begin{aligned} J_{-p}(x) &= \sum_{m=p}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-p+m+1)} = \\ &= (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)} = (-1)^p J_p(x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если  $p$  не является целым числом, то знаменатели в (3.9) не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность.

По признаку Даламбера ряд (3.9) сходится для всех  $x \neq 0$  при дробных  $p$  и для всех  $x$  при целых  $p$  (см. (3.10)).

Функция  $J_{-p}(x)$  также называется бесселевой функцией первого рода индекса  $-p$ . Объединяя формулы (3.8) и (3.9) в одну, получим:

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)},$$

где число  $p$  может быть как положительным, так и отрицательным.

Вернемся к отысканию общего интеграла уравнения (3.3).

Если число  $p > 0$  не является целым, то функции  $J_p(x)$  и  $J_{-p}(x)$  линейно независимы, так как  $J_p(0) = 0$ , а  $J_{-p}(0) = \infty$  и, следовательно,

но, не существует постоянной  $C$ , для которой выполнялось бы равенство

$$J_p(x) = CJ_{-p}(x).$$

Поэтому, если  $p$  не является целым числом, то общий интеграл уравнения (3.3) имеет вид:

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x), \quad (3.11)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Если же  $p \geq 0$  есть целое число, то в силу (3.10) функции  $J_p(x)$  и  $J_{-p}(x)$  линейно зависимы, и, следовательно, (3.11) не дает общего интеграла. Поэтому для целых  $p$  строится новое решение  $Y_p(x)$  уравнения (3.3), линейно независимое от  $J_p(x)$ . Оно называется **бесселевой функцией второго рода** и определяется по формуле:

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \quad (3.12)$$

при дробных  $p$  и

$$Y_n(x) = J_n(x) \left( \ln \frac{x}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left( \frac{x}{2} \right)^{-n+2m} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2m} \left( \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right)$$

при целых  $p = n$ , где  $C = 0,577215664901532\dots$  – постоянная Эйлера (эта формула получается из (3.12) при  $p = n$  по правилу Лопиталья).

Таким образом, при целых  $p = n$  общий интеграл уравнения (3.3) есть

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x).$$

Между функциями Бесселя с различными индексами существует связь. Она выражается в следующих соотношениях:

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x), \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x). \quad (3.14)$$

Аналогичные формулы справедливы и для соответствующих функций второго рода.

Из (3.13) и (3.14) получаются формулы:

$$xJ'_p(x) \pm pJ_p(x) = \pm xJ_{p\pm 1}(x), \quad (3.15)$$

$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x), \quad (3.16)$$

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x). \quad (3.17)$$

Обратимся теперь к корням бесселевых функций и их производных. Можно доказать (мы не будем этого делать из-за большого объема выкладок), что любое решение уравнения Эйлера-Бесселя имеет бесконечное число положительных корней. В дальнейшем нас будут интересовать только положительные корни функций  $J_p(x)$ . В силу теоремы Ролля между каждыми двумя последовательными корнями функции  $J_p(x)$  лежит по крайней мере один корень  $J'_p(x)$ . Следовательно, функция  $J'_p(x)$  имеет, как и  $J_p(x)$ , бесконечное множество положительных корней. Из теоремы единственности решения дифференциального уравнения следует, что функции  $J_p(x)$  и  $J'_p(x)$  не имеют общих корней.

При решении краевых задач часто приходится встречаться с функциями вида  $\alpha J_p(x) + \beta xJ'_p(x)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые постоянные. Любая такая функция имеет бесконечное множество положительных корней.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{p^2}{x}y = \lambda xy, \quad x \in (0,1], \quad (3.16)$$

$$y(x) \text{ ограничена при } x \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

$$\alpha y(1) + \beta y'(1) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \quad (3.19)$$

Общий интеграл уравнения (3.1) имеет вид:

$$y(x) = C_1 J_p(\sqrt{\lambda x}) + C_2 J_{-p}(\sqrt{\lambda x}), \text{ если } p > 0 \text{ дробное,}$$

и

$$y(x) = C_1' J_n(\sqrt{\lambda x}) + C_2' Y_n(\sqrt{\lambda x}), \text{ если } p = n \geq 0 \text{ целое}$$

(для этого надо вспомнить, что уравнение (3.3) получалось из уравнения (3.1) заменой  $\tilde{x} = \sqrt{\lambda x}$ ).

В силу условия (3.18)  $C_2 = 0$  ( $C_2' = 0$ ), так как функции  $J_{-p}(x)$  ( $Y_n(x)$ ) неограниченны в нуле. Поэтому при всех  $p \geq 0$  имеем

$$y(x) = C_1 J_p(\sqrt{\lambda x}).$$

Чтобы получить решение, не равное тождественно нулю, нужно считать  $C_1 \neq 0$ . Положим  $C_1 = 1$ , так как собственные функции определены с точностью до постоянного множителя.

Подставим теперь  $y(x)$  в краевое условие (3.19). Получим:

$$\alpha J_p(\sqrt{\lambda}) + \beta \sqrt{\lambda} J_p'(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Обозначим  $\mu = \sqrt{\lambda}$ . Тогда последнее уравнение примет вид:

$$\alpha J_p(\mu) + \beta \mu J_p'(\mu) = 0$$

Как мы знаем, такое уравнение имеет бесконечно много положительных решений  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ . Следовательно, собственные значения

задачи (3.1), (3.18) – (3.19) будут

$$\lambda_m = \mu_m^2, \quad m = 1, 2, \dots,$$

а собственные функции

$$y(x; \lambda_m) = J_p(\sqrt{\lambda_m} x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Покажем, что функции вида  $J_p(\sqrt{\lambda_m} x)$  ( $p \geq 0$ ) ортогональны с весом  $x$  на отрезке  $[0, 1]$ . Положим  $y_m(x) = J_p(\sqrt{\lambda_m} x)$ ,  $y_n(x) = J_p(\sqrt{\lambda_n} x)$ . Тогда  $y_m(x)$  и  $y_n(x)$  удовлетворяют уравнениям:

$$-\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy_m}{dx} \right) + \frac{p^2}{x} y_m = \lambda_m x y_m,$$

$$-\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy_n}{dx} \right) + \frac{p^2}{x} y_n = \lambda_n x y_n.$$

Умножим первое равенство на  $y_n$ , а второе – на  $y_m$  и вычтем второе из первого. Получим:

$$-\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy_m}{dx} \right) y_n + \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy_n}{dx} \right) y_m = (\lambda_m - \lambda_n) x y_m y_n,$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[ x \left( y_m \frac{dy_n}{dx} - y_n \frac{dy_m}{dx} \right) \right] = (\lambda_m - \lambda_n) x y_m y_n.$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от 0 до 1:

$$\left[ x \left( y_m \frac{dy_n}{dx} - y_n \frac{dy_m}{dx} \right) \right] \Big|_0^1 = (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 x y_m y_n dx. \quad (3.20)$$

Покажем, что интеграл  $\int_0^1 x y_m y_n dx$  действительно существует. Для



этого прежде всего заметим, что по формуле (3.8)

$$y_m(x) = J_p(\sqrt{\lambda_m}x) = x^p \varphi(x), \quad y_n(x) = J_p(\sqrt{\lambda_n}x) = x^p \psi(x), \quad (3.21)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – суммы степенных рядов, и, следовательно, представляют собой непрерывные функции с непрерывными производными. Поэтому

$$|xy_m y_n| = |x^{2p+1} \varphi(x) \psi(x)| \leq Mx^{2p+1} \quad (M = \text{const}).$$

Так как  $2p+1 > 0$ , то упомянутый интеграл существует.

Из (3.21) следует, что

$$\left[ x \left( y_m \frac{dy_n}{dx} - y_n \frac{dy_m}{dx} \right) \right] \Big|_{x=0} = 0.$$

Поэтому вместо (3.20) можно писать

$$\left[ x \left( y_m \frac{dy_n}{dx} - y_n \frac{dy_m}{dx} \right) \right] \Big|_{x=1} = (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 xy_m y_n dx. \quad (3.22)$$

А так как

$$\begin{aligned} y_m(1) &= J_p(\sqrt{\lambda_m}), & y_n(1) &= J_p(\sqrt{\lambda_n}), \\ y'_m(1) &= \sqrt{\lambda_m} J'_p(\sqrt{\lambda_m}), & y'_n(1) &= \sqrt{\lambda_n} J'_p(\sqrt{\lambda_n}), \end{aligned}$$

то (3.22) примет вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} J_p(\sqrt{\lambda_m}) J'_p(\sqrt{\lambda_n}) - \sqrt{\lambda_m} J_p(\sqrt{\lambda_n}) J'_p(\sqrt{\lambda_m}) &= \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 x J_p(\sqrt{\lambda_m}x) J_p(\sqrt{\lambda_n}x) dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Рассмотрим теперь три случая.

1)  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$  удовлетворяют условиям:  $J_p(\sqrt{\lambda_m}) = 0$ ,  $J_p(\sqrt{\lambda_n}) = 0$ ,

$\lambda_m \neq \lambda_n$ . При таких  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$  левая часть соотношения (3.23) обращает-

ся в нуль. Поэтому в силу того, что  $\lambda_m \neq \lambda_n$ , получаем:

$$\int_0^1 x J_p(\sqrt{\lambda_n} x) J_p(\sqrt{\lambda_m} x) dx = 0. \quad (3.24)$$

2)  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$  удовлетворяют условиям:  $J'_p(\sqrt{\lambda_m}) = 0$ ,  $J'_p(\sqrt{\lambda_n}) = 0$ ,  $\lambda_m \neq \lambda_n$ . Левая часть (3.23) и в этом случае обращается в нуль, и мы снова получаем равенство (3.24);

3)  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$  удовлетворяют условиям:

$$\alpha J_p(\sqrt{\lambda_m}) + \beta \sqrt{\lambda_m} J'_p(\sqrt{\lambda_m}) = 0,$$

$$\alpha J_p(\sqrt{\lambda_n}) + \beta \sqrt{\lambda_n} J'_p(\sqrt{\lambda_n}) = 0.$$

Умножим первое равенство на  $J_p(\sqrt{\lambda_n})$ , а второе – на  $J_p(\sqrt{\lambda_m})$  и вычтем из второго первое. При этом получим:

$$\sqrt{\lambda_n} J_p(\sqrt{\lambda_m}) J'_p(\sqrt{\lambda_n}) - \sqrt{\lambda_m} J_p(\sqrt{\lambda_n}) J'_p(\sqrt{\lambda_m}) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что в случаях 1)–3) функций  $J_p(\sqrt{\lambda_m} x)$  и  $J_p(\sqrt{\lambda_n} x)$  ортогональны с весом  $x$  на отрезке  $[0, 1]$ .

Вычислим теперь

$$\|J_p(\sqrt{\lambda_m} x)\|_x^2 = \int_0^1 x J_p^2(\sqrt{\lambda_m} x) dx.$$

При  $\lambda_m \neq \lambda_n$  из формулы (3.23) следует, что

$$\frac{\int_0^1 x J_p(\sqrt{\lambda_n} x) J_p(\sqrt{\lambda_m} x) dx = \frac{\sqrt{\lambda_m} J_p(\sqrt{\lambda_n}) J'_p(\sqrt{\lambda_m}) - \sqrt{\lambda_n} J_p(\sqrt{\lambda_m}) J'_p(\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n - \lambda_m}}{\lambda_n - \lambda_m}.$$

При  $\lambda_n \rightarrow \lambda_m$  числитель и знаменатель стремятся к нулю. Чтобы раскрыть эту "неопределенность", воспользуемся правилом Лопиталя. Получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x J_p^2(\sqrt{\lambda_m} x) dx = \\ &= \lim_{\lambda_n \rightarrow \lambda_m} \frac{\sqrt{\lambda_m} J_p'(\sqrt{\lambda_n}) J_p'(\sqrt{\lambda_m}) - J_p(\sqrt{\lambda_m}) J_p'(\sqrt{\lambda_n}) - \sqrt{\lambda_n} J_p(\sqrt{\lambda_m}) J_p''(\sqrt{\lambda_n})}{2\sqrt{\lambda_n}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ J_p'^2(\sqrt{\lambda_m}) - J_p(\sqrt{\lambda_m}) J_p''(\sqrt{\lambda_m}) - \frac{J_p(\sqrt{\lambda_m}) J_p'(\sqrt{\lambda_m})}{\sqrt{\lambda_m}} \right]. \end{aligned}$$

Но  $J_p(\sqrt{\lambda_m})$  как функция от  $\mu_m = \sqrt{\lambda_m}$  удовлетворяет уравнению (3.3), т.е.

$$\mu_m^2 J_p''(\mu_m) + \mu_m J_p'(\mu_m) + (\mu_m^2 - p^2) J_p(\mu_m) = 0,$$

откуда

$$-J_p(\sqrt{\lambda_m}) J_p''(\sqrt{\lambda_m}) - \frac{J_p(\sqrt{\lambda_m}) J_p'(\sqrt{\lambda_m})}{\sqrt{\lambda_m}} = \left(1 - \frac{p^2}{\lambda_m}\right) J_p^2(\sqrt{\lambda_m}).$$

Поэтому

$$\int_0^1 x J_p^2(\sqrt{\lambda_m} x) dx = \frac{1}{2} \left[ J_p'^2(\sqrt{\lambda_m}) + \left(1 - \frac{p^2}{\lambda_m}\right) J_p^2(\sqrt{\lambda_m}) \right].$$

В частности, если  $J_p(\sqrt{\lambda_m}) = 0$ , то

$$\int_0^1 x J_p^2(\sqrt{\lambda_m} x) dx = \frac{1}{2} J_p'^2(\sqrt{\lambda_m}),$$

или, в силу (3.15) при  $x = \sqrt{\lambda_m}$ ,

$$\int_0^1 x J_p^2(\sqrt{\lambda_m} x) dx = \frac{1}{2} J_{p+1}^2(\sqrt{\lambda_m}).$$

Если  $J_p'(\sqrt{\lambda_m}) = 0$ , то

$$\int_0^1 x J_p^2(\sqrt{\lambda_m} x) dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{\lambda_m}\right) J_p^2(\sqrt{\lambda_m}).$$

Обратимся теперь к главной цели нашего изложения – разложению функций в ряды Фурье по собственным функциям задачи (3.1), (3.18) – (3.19).

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$  – собственные значения задачи (3.1), (3.18) – (3.19), а  $J_p(\sqrt{\lambda_m} x)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  – ее собственные функции. Тогда всякой абсолютно интегрируемой на  $[0, 1]$  функции  $f(x)$  можно сопоставить ее ряд Фурье по системе  $\{J_p(\sqrt{\lambda_m} x)\}$ :

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_p(\sqrt{\lambda_m} x), \quad (3.25)$$

где коэффициенты Фурье-Бесселя определяются по формулам:

$$c_m = \frac{1}{\left\| J_p(\sqrt{\lambda_m} x) \right\|_x^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\sqrt{\lambda_m} x) dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

Справедлива

**Теорема 3.1.** Если  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на  $(0, 1]$  и удовлетворяет краевым условиям:

$$f(x) \text{ ограничена при } x \rightarrow 0,$$

$$f(1) = 0,$$

то ее ряд Фурье (3.25) по собственным функциям задачи (3.1), (3.18) –

(3.19) с  $\beta = 0$  сходится к  $f(x)$  абсолютно и равномерно на каждом отрезке  $[\delta, 1]$ ,  $\delta > 0$ .

При  $x = 0$  и  $p > 0$  сумма ряда (3.25) равна нулю. А при  $p = 0$  ряд

(3.25) в нуле принимает вид  $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$  и говорить о его сходимости можно только в частных случаях, которые мы рассматривать не будем.

**Теорема 3.2.** Если кусочно-непрерывная функция  $f(x)$  обладает кусочно-непрерывными производными до второго порядка на  $[0, 1]$ , то ее ряд Фурье (3.25) по собственным функциям задачи (3.1), (3.18) – (3.19) с  $\beta = 0$  сходится при  $0 < x < 1$  к  $f(x)$  в каждой точке непрерывности и к  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  в каждой точке разрыва функции  $f(x)$ .

При  $x = 1$  и данных краевых условиях ряд (3.25) всегда сходится к нулю.

В случае  $\beta \neq 0$  условия представимости функции  $f(x)$  ее рядом Фурье по собственным функциям задачи (3.1), (3.18) – (3.19) более сложные.

**Теорема 3.3.** Если кусочно-непрерывная функция  $f(x)$  обладает кусочно-непрерывными производными до второго порядка на  $[0, 1]$ , то ее ряд Фурье (3.25) по собственным функциям задачи (3.1), (3.18) – (3.19),  $p > -\frac{\alpha}{\beta}$ , сходится при  $0 < x < 1$  к  $f(x)$  в каждой точке непрерывности и к  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  в каждой точке разрыва функции  $f(x)$ .

При  $x = 1$  и данных краевых условиях ряд (3.25) сходится к  $f(1-0)$

(если  $f(x)$  непрерывна, то к  $f(1)$ ).

Насколько существенно условие  $p > -\frac{\alpha}{\beta}$ , мы покажем на конкретном примере. Пусть  $f(x) = x^p$  ( $0 \leq x \leq 1$ ). Разложим ее в ряд Фурье по системе  $\{J_p(\sqrt{\lambda_m}x)\}$ , где  $J_p(\sqrt{\lambda_m}x)$  являются собственными функциями задачи (3.1), (3.18), (3.19) с  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ , т.е. удовлетворяют условию  $J'_p(\sqrt{\lambda_m}) = 0$ .

По формулам (3.26)

$$c_m = \frac{2\lambda_m}{(\lambda_m - p^2)J_p^2(\sqrt{\lambda_m})} \int_0^1 x^{p+1} J_p(\sqrt{\lambda_m}x) dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

Но в силу (3.13)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p+1} J_p(\sqrt{\lambda_m}x) dx &= \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \right)^{p+2} \int_0^{\sqrt{\lambda_m}} z^{p+1} J_p(z) dz = \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \right)^{p+2} \int_0^{\sqrt{\lambda_m}} [z^{p+1} J_{p+1}(z)]' dz = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} J_{p+1}(\sqrt{\lambda_m}). \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 3.3 при  $p > 0$

$$x^p = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_m} J_{p+1}(\sqrt{\lambda_m}) J_p(\sqrt{\lambda_m}x)}{(\lambda_m - p^2) J_p^2(\sqrt{\lambda_m})}$$

Положим теперь  $p = 0$ . Тогда из (3.15)

$J_{p+1}(\sqrt{\lambda_m}) = J_1(\sqrt{\lambda_m}) = -J'_0(\sqrt{\lambda_m}) = 0$ . Но  $f(x) = x^0 \equiv 1$ , а все коэффициенты Фурье-Бесселя равны нулю!

Оказывается, для того чтобы теорема 3.3 была верна при  $p \leq -\frac{\alpha}{\beta}$

к системе  $\{J_p(\sqrt{\lambda_m}x)\}$  необходимо добавить новую функцию. В случае

$p = -\frac{\alpha}{\beta}$  этой функцией будет  $x^p$ . Нетрудно проверить, что она будет

решением задачи (3.1), (3.18) – (3.19) при  $-\frac{\alpha}{\beta} = p$  и  $\lambda = 0$ , а система

функций  $x^p, J_p(\sqrt{\lambda_1}x), J_p(\sqrt{\lambda_2}x), \dots, J_p(\sqrt{\lambda_m}x), \dots$  ортогональна на  $[0,1]$  с весом  $x$ .

Вернемся к нашему примеру. Мы видим, что  $0 = -\frac{\alpha}{\beta} = p$ . Следо-

вательно, присоединяя к системе  $\{J_0(\sqrt{\lambda_m}x)\}$  функцию  $x^0 = 1$  и обо-

значив через  $c_0$  соответствующий коэффициент Фурье-Бесселя функ-

ции  $f(x) \equiv 1$ , мы получим:

$$c_0 = \frac{\int_0^1 x \cdot 1 \cdot 1 \cdot dx}{\int_0^1 x \cdot 1^2 dx} = 1,$$

откуда

$$1 = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$$

При  $p < -\frac{\alpha}{\beta}$  "добавочная" функция имеет более сложный вид. По-

этому мы не останавливаемся на этом случае.

Укажем еще одну важную теорему разложения.

**Теорема 3.4.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна, дважды дифференцируема на  $[0,1]$  и удовлетворяет условиям:  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $\alpha f(1) + \beta f'(1) = 0$ ,  $f''(x)$  ограничена. Тогда ее ряд Фурье (3.25) по собственным функциям задачи (3.1), (3.18)–(3.19) сходится абсолютно и равномерно на  $[0,1]$ .

**2. Полиномы Лежандра как собственные функции сингулярной задачи Штурма-Лиувилля.** Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d^2 u}{dt^2} - \left( \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 t + \frac{1}{2} \right) u = \lambda u, \quad t \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.27)$$

$$u\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (3.28)$$

Здесь  $q(t) = -\left(\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 t + \frac{1}{2}\right) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ . Поэтому задача (3.27)

– (3.28) – сингулярная задача Штурма-Лиувилля. Сделав замену

$x = \sin t$ ,  $y = \frac{u}{\sqrt{\cos t}}$ , вместо задачи (3.27) – (3.28) получим задачу

$$-(1-x^2)y'' + 2xy' = \lambda y, \quad x \in (-1,1), \quad (3.29)$$

$$y(x) \text{ ограничена при } x \rightarrow \pm 1. \quad (3.30)$$

Будем искать  $y(x)$  в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Подставив его в уравнение (3.29) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим соотношение:



$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.31)$$

Заметим, что уравнение (3.29) инвариантно относительно замены  $x$  на  $-x$ : если функция  $y(x)$  удовлетворяет уравнению, то и  $y(-x)$  ему удовлетворяет. Следовательно, уравнению удовлетворяют и четная функция  $y(x) + y(-x)$  и нечетная функция  $y(x) - y(-x)$ . Поэтому достаточно решить задачу (3.29)–(3.30) для четных и нечетных функций.

Из (3.31) видно, что если  $y(x)$  – четная функция, то все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю, а если  $y(x)$  – нечетная функция, то все коэффициенты с четными номерами равны нулю.

Пусть  $k = n - 2m > 0$ . Тогда в силу (3.31) имеем:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n-2)(n-1) - \lambda}{(n-1)n} \cdot \frac{(n-4)(n-3) - \lambda}{(n-3)(n-2)} \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot \frac{(n-2m)(n-2m+1) - \lambda}{(n-2m+1)(n-2m+2)} a_k = \\ &= \frac{n-2}{n} \left( 1 - \frac{\lambda}{(n-1)(n-2)} \right) \frac{n-4}{n-2} \left( 1 - \frac{\lambda}{(n-3)(n-4)} \right) \dots \\ &\quad \dots \frac{n-2m}{n-2m+2} \left( 1 - \frac{\lambda}{(n-2m+1)(n-2m)} \right) a_k = \quad (3.32) \\ &= \frac{k}{n} \left( 1 - \frac{\lambda}{(n-1)(n-2)} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{(n-3)(n-4)} \right) \dots \\ &\quad \dots \left( 1 - \frac{\lambda}{(n-2m+1)(n-2m)} \right) a_k. \end{aligned}$$

Из (3.31) видно, что  $y(x)$  есть полином степени  $n$  в том и только том случае, когда  $\lambda = n(n+1)$ . При всех остальных  $\lambda$  мы получим ряд, сходящийся при  $|x| < 1$ . Зафиксируем  $k$  столь большое, что все сомножители в (3.32) положительны ( $a_k$  также можно считать положительным). При возрастании  $n$  каждая скобка в (3.32) стремится к 1, поэтому при  $n > k$  имеем  $a_n > \frac{C}{n}$ , где  $C > 0$  – постоянная (так как  $k$  и  $a_k$  – фиксированные положительные числа). Следовательно,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  не ограничена в окрестности  $x = 1$ , а значит не является решением задачи (3.29) – (3.30).

Таким образом,  $\lambda_n = n(n+1)$  и

$$y(x; \lambda_n) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (3.33)$$

– решение задачи (3.29) – (3.30). Покажем, что  $y(x; \lambda_n)$  есть  $n$ -й полином Лежандра. Из замечания, сделанного выше, ясно, что в сумму (3.33) входят степени  $x$  одинаковой четности с  $n$ .

Для доказательства будет удобнее положить  $a_k = b_{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ; тогда (3.33) перепишется в виде

$$y(x; \lambda_n) = \sum_{k=0}^n b_k x^{n-k} \quad (3.33')$$

Подставляя в уравнение (3.29), найдем:

$$\begin{aligned} -(1-x^2) \sum_{k=0}^n (n-k)(n-k-1) b_k x^{n-k-2} + 2x \sum_{k=0}^n (n-k) b_k x^{n-k-1} = \\ = n(n+1) \sum_{k=0}^n b_k x^{n-k} \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим:

$$-\sum_{k=0}^n (n-k)(n-k-1)b_k x^{n-k-2} = \sum_{k=0}^n [n(n+1) - (n-k)(n-k+1)] b_k x^{n-k}.$$

Заменяя в сумме слева индекс  $k$  на  $k-2$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} -\sum_{k=2}^n (n-k+2)(n-k+1)b_{k-2} x^{n-k} = \\ = [n(n+1) - (n-1)n] b_1 x^{n-1} + \\ + \sum_{k=2}^n [n(n+1) - (n-k)(n-k+1)] b_k x^{n-k}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$b_1 = 0,$$

$$b_k = -\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{k(2n-k+1)} b_{k-2}.$$

Отсюда видно, что все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю. Положим  $k = 2m$ ; тогда

$$b_{2m} = -\frac{(n-2m+2)(n-2m+1)}{2m(2n-2m+1)} b_{2m-2}.$$

Пусть  $b_0 = 1$ . Значит,

$$b_2 = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}, \quad b_4 = \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2(2n-3)}, \quad \dots,$$

$$\begin{aligned} b_{2m} &= (-1)^m \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2(2n-3)} \dots \frac{(n-2m+2)(n-2m+1)}{2m(2n-2m+1)} = \\ &= (-1)^m C_n^m \frac{n!}{(2n)!} \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}. \end{aligned}$$

Откуда

$$y(x; \lambda_n) = \frac{n!}{(2n)!} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m C_n^m \frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!} x^{n-2m},$$

а это и есть полином Лежандра степени  $n$  со старшим коэффициентом, равным 1 (см. формулу (5.7), гл.3).

Таким образом, мы доказали, что полиномы Лежандра являются собственными функциями задачи (3.29)–(3.30) (или, что то же (3.27)–(3.28)). Теоремы о разложении функции в ряд Фурье по полиномам Лежандра были рассмотрены в гл.3, § 7.

## § 4. Приложения

Чаще всего метод собственных функций применяется в решении задач математической физики. В данном параграфе мы не будем выводить основные уравнения (их вывод и физические постановки задач можно найти в книге [8], гл. III). Мы рассмотрим примеры, которые требуют применения изложенной выше теории.

**1. Свободные колебания струны.** Пусть функция  $u(x, t)$  задана в области  $[0, l] \times [0, \infty)$  и дважды непрерывно дифференцируема в ней. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad (4.3)$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  – заданные дважды непрерывно дифференцируемые на  $[0, l]$  функции, обращающиеся в нуль при  $x = 0$  и  $x = l$ .

Будем искать решения уравнения (4.1) (отличные от  $u \equiv 0$ ), удовлетворяющие граничным условиям (4.2), в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4.4)$$

Подставляя в (4.1), получим:

$$XT'' = a^2 X''T,$$

откуда

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda = \text{const},$$

следовательно,

$$-X'' = \lambda X, \quad (4.5)$$

$$-T'' = a^2 \lambda T. \quad (4.6)$$

Чтобы функция (4.4) удовлетворяла условиям (4.2), нужно потребовать, чтобы

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (4.7)$$

Таким образом, мы получили задачу Штурма-Лиувилля (4.5), (4.7). Все собственные значения нашей задачи положительны (это можно проверить непосредственно: рассмотрев решение уравнения (4.5) при  $\lambda < 0$ , убедиться в невыполнении условий (4.7)). Поэтому решение уравнения (4.5) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (C_1 = \text{const}, C_2 = \text{const}).$$

Подставив краевые условия (4.7), мы получим:

$$X(0) = C_1 = 0,$$

$$X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Так как  $X(x)$  отлична от тождественного нуля, то  $C_2 \neq 0$ . Положим  $C_2 = 1$ . Следовательно,

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

-- собственные значения, а

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

-- собственные функции задачи (4.5), (4.7).

Подставляя  $\lambda = \lambda_n$  в уравнение (4.6), найдем его решение:

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n t}{l} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, частные решения уравнения (4.1) будут:

$$u_n(x, t) = \left( A_n \cos \frac{a\pi n t}{l} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а его общее решение есть

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{a\pi n t}{l} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (4.8)$$

Очевидно, что  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям (4.2). Определим коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  так, чтобы  $u(x, t)$  удовлетворяла условиям (4.3). Имеем:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x), \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} = g(x). \quad (4.10)$$

Эти равенства законны, если ряд (4.8) сходится и его можно дифференцировать почленно. Но равенства (4.9) и (4.10) равносильны тому, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  представимы своими рядами Фурье по собственным функциям задачи (4.5), (4.7). В силу условий, наложенных на  $f(x)$  и  $g(x)$ , это действительно так (см. теорему 2.1). Коэффициенты этих разложений определяются по формулам:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (4.11)$$

$$B_n \frac{a\pi n}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

откуда

$$B_n = \frac{2}{a\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (4.12)$$

Таким образом, решение задачи (4.1)–(4.3) дается рядом (4.8), где коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  вычисляются по формулам (4.11) и (4.12).

**2. Вынужденные колебания струны.** Пусть функция  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям п.1 и уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (4.13)$$

где для наглядности положим  $F(x, t) = A \sin \omega t$ . Рассмотрим смешанную задачу (4.13), (4.2) – (4.3).

Будем искать  $u(x, t)$  в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

где  $X_n(x)$  – собственные функции задачи (4.5), (4.7), т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (4.14)$$

Функцию  $F(x, t)$  разложим в ряд Фурье по функциям  $\{X_n(x)\}$ :

$$F(x, t) = A \sin \omega t = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (4.15)$$

где

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l A \sin \omega t \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin \omega t \quad (n=1, 2, \dots).$$

Подставив (4.14) и (4.15) в уравнение (4.13) и продифференцировав ряды почленно, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( T_n'' + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} T_n - \frac{2A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin \omega t \right) \sin \frac{\pi n x}{l} = 0,$$

откуда

$$T_n'' + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} T_n - \frac{2A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin \omega t = 0. \quad (4.16)$$

Положим  $\omega_n = \frac{a\pi n}{l}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), тогда уравнение (4.16) примет вид

$$T_n'' + \omega_n^2 T_n = \frac{2A}{\pi n} [1 - (-1)^n] \sin \omega t. \quad (4.17)$$

Пусть сначала  $\omega_n \neq \omega$ . Тогда решением уравнения (4.17) будет

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{2A [1 - (-1)^n]}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \quad (4.18)$$

Чтобы выполнялись условия (4.3), нужно потребовать, чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{\pi n x}{l} = g(x).$$

Как и в п.1, из этих разложений следует возможность почленного дифференцирования ряда (4.14). Вычисляя коэффициенты Фурье функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , в силу (4.18) будем иметь:

$$T_n(0) = A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (4.19)$$

$$T_n'(0) = B_n \omega_n + \frac{2A\omega [1 - (-1)^n]}{\pi n (\omega_n^2 - \omega^2)} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$



откуда

$$B_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx - \frac{2A\omega [1 - (-1)^n]}{\pi n \omega_n (\omega_n^2 - \omega^2)}. \quad (4.20)$$

Подставляя (4.19) и (4.20) в (4.18), а затем подставляя (4.18) в (4.14), получим:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{A}_n \cos \omega_n t + \bar{B}_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l} + \\ + \frac{4A}{\pi} \sin \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi (2k-1)x}{l}}{(2k-1)(\omega_{2k-1}^2 - \omega^2)} - \frac{4A\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_{2k-1} t \sin \frac{\pi (2k-1)x}{l}}{\omega_{2k-1} (\omega_{2k-1}^2 - \omega^2)},$$

где

$$\bar{B}_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Таким образом, решение задачи (4.13), (4.2) – (4.3) отличается от решения задачи (4.1) – (4.3) двумя “слагаемыми”, которые вносятся наличием возмущающей силы  $F(x, t)$ .

Пусть теперь  $\omega_n = \omega$  при некотором  $n$ . Тогда решением уравнения (4.17) будет

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t - \frac{At}{\pi n \omega} [1 - (-1)^n] \cos \omega t,$$

откуда при нечетном  $n$  слагаемое  $T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$  суммы (4.14) не ограничено.

**3. Свободные колебания стержня.** Пусть функция  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям п.1. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.21)$$

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad (4.22)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad (4.23)$$

где функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие же, как и в п.1.

Как и в п.1, ищем частные решения вида

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

откуда получаем уравнения

$$-X'' = \lambda X, \quad (4.24)$$

$$-T'' = a^2 \lambda T \quad (4.25)$$

при условиях

$$X(0) = X'(l) = 0. \quad (4.26)$$

Решение уравнения (4.24) имеет вид ( $\lambda > 0$ , так как в противном случае не выполняются условия (4.26)):

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (C_1 = \text{const}, \quad C_2 = \text{const}).$$

В силу (4.26) имеем:

$$X(0) = C_1 = 0,$$

$$X'(l) = C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Так как  $X(x)$  отлична от тождественного нуля, то  $C_2 \neq 0$ . Положим  $C_2 = 1$ . Тогда

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi(2n+1)}{2l} \right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

– решение задачи (4.24), (4.26).

При  $\lambda = \lambda_n$  из уравнения (4.25) находим:

$$T_n(t) = A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Следовательно,

$$u_n(x,t) = (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t) \sin \sqrt{\lambda_n}x \quad (n=0,1,2,\dots)$$

– частные решения уравнения (4.21). Общее решение задачи (4.21) – (4.23) ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t) \sin \sqrt{\lambda_n}x. \quad (4.27)$$

Чтобы были выполнены условия (4.23), потребуем, чтобы

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \sqrt{\lambda_n}x = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a\sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n}x = g(x).$$

Из этих разложений и свойств функций  $f(x)$  и  $g(x)$  следует возможность почленного дифференцирования ряда (4.27). Вычисляя коэффициенты Фурье функций  $f(x)$  и  $g(x)$  по системе  $\{X_n(x)\}$ , будем иметь:

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin \sqrt{\lambda_n}x dx}{\int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n}x dx} \quad (n=0,1,2,\dots),$$

$$B_n a \sqrt{\lambda_n} = \frac{\int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Но

$$\int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l (1 - \cos 2\sqrt{\lambda_n} x) dx = \frac{l}{2},$$

поэтому

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{a \sqrt{\lambda_n} l} \int_0^l g(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = \\ &= \frac{4}{(2n+1) a \pi} \int_0^l g(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Таким образом, решение задачи (4.21) – (4.23) дается формулой (4.27), где  $A_n$  и  $B_n$  вычисляются по формулам (4.28), (4.29).

**4. Вынужденные колебания стержня.** Пусть функция  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям п.1 и уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (4.30)$$

где для определенности  $F(x, t) = g = \text{const}$ . Рассмотрим смешанную задачу (4.30), (4.22) – (4.23).

Будем искать  $u(x, t)$  в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

где  $X_n(x)$  – собственные функции задачи (4.24), (4.26), т.е.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (4.31)$$

где

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi(2n+1)}{2l} \right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Функцию  $F(x, t)$  разложим в ряд Фурье по функциям  $\{X_n(x)\}$ :

$$F(x, t) = g = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad (4.32)$$

где

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = \frac{2g}{l\sqrt{\lambda_n}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Подставив (4.31) и (4.32) в уравнение (4.30), получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( T_n'' + a^2 \lambda_n T_n - \frac{2g}{l\sqrt{\lambda_n}} \right) \sin \sqrt{\lambda_n} x = 0,$$

откуда

$$T_n'' + a^2 \lambda_n T_n - \frac{2g}{l\sqrt{\lambda_n}} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$T_n(t) = A_n \cos a\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n} t + \frac{2g}{l a^2 \lambda_n^{3/2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Чтобы выполнялись условия (4.3), нужно потребовать, чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \sin \sqrt{\lambda_n} x = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) \sin \sqrt{\lambda_n} x = g(x).$$

Вычисляя коэффициенты Фурье для  $f(x)$  и  $g(x)$  по системе  $\{X_n(x)\}$ , будем иметь:

$$T_n(0) = A_n + \frac{2g}{la^2 \lambda_n^{3/2}} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx,$$

$$T'_n(0) = B_n a \sqrt{\lambda_n} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx,$$

откуда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx - \frac{2g}{la^2 \lambda_n^{3/2}} = \bar{A}_n - \frac{2g}{la^2 \lambda_n^{3/2}},$$

$$B_n = \frac{2}{la \sqrt{\lambda_n}} \int_0^l g(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Поэтому

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \bar{A}_n \cos a \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin a \sqrt{\lambda_n} t \right) \sin \sqrt{\lambda_n} x - \\ - \frac{2g}{la^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos a \sqrt{\lambda_n} t \sin \sqrt{\lambda_n} x}{\lambda_n^{3/2}} + \frac{2g}{la^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x}{\lambda_n^{3/2}}.$$

**5. Радиальные колебания круглой мембраны.** Пусть функция  $u(r,t)$  задана в области  $(0,l] \times [0,\infty)$  и дважды непрерывно дифференцируема в ней. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (4.33)$$

$$u(r,t) \text{ ограничена при } r \rightarrow 0, \quad (4.34)$$

$$u(l, t) = 0, \quad (4.35)$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = g(r), \quad (4.36)$$

где  $f(r)$  и  $g(r)$  – заданные дважды непрерывно дифференцируемые на  $(0, l]$  функции, обращающиеся в нуль при  $r = l$  и ограниченные при  $r \rightarrow 0$ .

Ищем частные решения уравнения (4.33), удовлетворяющие условиям (4.34) – (4.35), в виде:

$$u(r, t) = R(r)T(t).$$

Подставляя в (4.33), получим:

$$RT'' = c^2 \left( R''T + \frac{1}{r} R'T \right),$$

откуда

$$\frac{R'' + \frac{1}{r} R'}{R} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda = \text{const},$$

и, следовательно,

$$-R'' - \frac{1}{r} R' = \lambda R, \quad (4.37)$$

$$-T'' = c^2 \lambda T. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.37) есть уравнение Эйлера-Бесселя индекса  $p = 0$  с параметром  $\lambda > 0$ . Его общий интеграл имеет вид

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r).$$

В силу условия (4.34)  $C_2 = 0$ . Поэтому  $C_1 \neq 0$ . Тогда из условия (4.35) следует:

$$J_0(\sqrt{\lambda} l) = 0,$$

т.е.  $\mu = \sqrt{\lambda} l$  должно быть корнем функции  $J_0(\mu)$ . Полагая  $C_1 = 1$ , получим

$$\lambda_n = \left( \frac{\mu_n}{l} \right)^2,$$

$$R_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{l}\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (4.39)$$

где  $\mu_n = \sqrt{\lambda_n} l$  есть  $n$ -й положительный корень функции  $J_0(\mu)$ .

Подставляя  $\lambda = \lambda_n$  в уравнение (4.38), найдем:

$$T_n(t) = A_n \cos c\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin c\sqrt{\lambda_n} t \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, частные решения уравнения (4.33) имеют вид:

$$u_n(r, t) = (A_n \cos c\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin c\sqrt{\lambda_n} t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Общее решение уравнения (4.33) есть

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos c\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin c\sqrt{\lambda_n} t) J_0(\sqrt{\lambda_n} r), \quad (4.40)$$

где коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  находятся из условий

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = f(r),$$

$$\frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c\sqrt{\lambda_n} J_0(\sqrt{\lambda_n} r) = g(r).$$

Эти условия равносильны тому, что функции  $f(r)$  и  $g(r)$  представимы своими рядами Фурье по системе  $\{J_0(\sqrt{\lambda_n} r)\}$ . Но последнее имеет место в силу свойств  $f(r)$  и  $g(r)$  и теоремы 3.1.

Вычислим коэффициенты Фурье для  $f(r)$  и  $g(r)$ :



$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^l r f(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) dr, \quad (4.41)$$

$$B_n c \sqrt{\lambda_n} = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^l r g(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) dr$$

или

$$B_n = \frac{2}{cl^2 \sqrt{\lambda_n} J_1^2(\mu_n)} \int_0^l r g(r) J_0(\sqrt{\lambda_n} r) dr. \quad (4.42)$$

Таким образом, решение задачи (4.33) – (4.36) дается рядом (4.40), где коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  определяются формулами (4.41) и (4.42).

**6. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре.** Пусть функция  $u(x, t)$  задана в области  $[0, l] \times [0, \infty)$  и дважды непрерывно дифференцируема в ней. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.43)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (4.44)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (4.45)$$

где  $f(x)$  – заданная непрерывно дифференцируемая на  $[0, l]$  функция, обращающаяся в нуль при  $x = 0$  и  $x = l$ .

Ищем частные решения уравнения (4.43) (отличные от  $u \equiv 0$ ), удовлетворяющие граничным условиям (4.44), в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (4.46)$$

Подставляя в (4.43), получим:

$$X T' = a^2 X'' T,$$

откуда

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda = \text{const},$$

следовательно,

$$-X'' = \lambda X, \quad (4.47)$$

$$-T' = a^2 \lambda T. \quad (4.48)$$

Чтобы функция (4.46) удовлетворяла условиям (4.44), нужно потребовать, чтобы

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (4.49)$$

Решение задачи (4.47), (4.49) имеет вид ( $\lambda > 0$ ):

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (C_1 = \text{const}, \quad C_2 = \text{const}),$$

где

$$X(0) = C_1 = 0,$$

$$X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Отсюда, считая  $C_2 \neq 0$ , получим  $\sqrt{\lambda} l = \pi n$ . Положим  $C_2 = 1$ . Следовательно,

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При  $\lambda = \lambda_n$  решение уравнения (4.48) есть

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t}, \quad A_n = \text{const} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, функции

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

представляют собой частные решения уравнения (4.43), удовлетворяющие граничным условиям (4.44).

Чтобы найти общее решение, составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (4.50)$$

и потребуем, чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x).$$

Следовательно, нужно разложить  $f(x)$  в ряд Фурье по системе

$\left\{ \sin \frac{\pi n x}{l} \right\}$ . Подсчет коэффициентов Фурье дает:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.51)$$

Таким образом, решение задачи (4.43) – (4.45) дается рядом (4.50), где коэффициенты  $A_n$  вычисляются по формулам (4.51).

Благодаря наличию множителей  $e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t}$  ряд (4.50) сходится равномерно для  $t \geq t_0 > 0$ , каково бы ни было  $t_0 > 0$ . То же справедливо и для рядов, получающихся почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$  (любое число раз). Следовательно, сумма ряда непрерывна и почленное дифференцирование законно.

**7. Распространение тепла в стержне, концы которого поддерживаются при постоянных температурах.** Пусть функция  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируема в области  $[0, l] \times [0, \infty)$ . Задача состоит в отыскании решения уравнения (4.43) при граничных условиях

$$u(0, t) = A = \text{const}, \quad u(l, t) = B = \text{const} \quad (4.52)$$

и начальном условии (4.45).

Будем искать решение задачи в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (4.53)$$

где

$$T_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.54)$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} T_n(t) = & \left[ -\frac{l}{\pi n} u(x, t) \cos \frac{\pi n x}{l} \right]_0^l + \left[ \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \sin \frac{\pi n x}{l} \right]_0^l - \\ & - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \end{aligned}$$

Так как  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (4.43) и условиям (4.52), то

$$\frac{1}{2} T_n(t) = \frac{1}{\pi n} \left[ A - (-1)^n B \right] - \frac{l}{a^2 \pi^2 n^2} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Дифференцируя (4.54) по  $t$ , получим:

$$T'_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{\pi n} \left[ A - (-1)^n B \right] - \frac{l^2}{2a^2 \pi^2 n^2} T'_n,$$

откуда

$$T'_n = \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} T_n - \frac{2a^2 \pi^2 n}{l^2} \left[ A - (-1)^n B \right].$$

Решение этого уравнения есть

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} + 2 \frac{A - (-1)^n B}{\pi n}. \quad (4.55)$$

Чтобы выполнялось условие (4.45), потребуем, чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x).$$

Вычисляя коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  по системе  $\left\{ \sin \frac{\pi n x}{l} \right\}$ , найдем:

$$T_n(0) = A_n + 2 \frac{A - (-1)^n B}{\pi n} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

поэтому

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx - 2 \frac{A - (-1)^n B}{\pi n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.56)$$

Таким образом, решение задачи (4.43), (4.45), (4.52) дается рядом (4.53), где  $T_n(t)$  определяются формулами (4.55), (4.56).

**8. Распространение тепла в стержне, концы которого находятся при заданных переменных температурах.** Пусть функция  $u(x, t)$  такая же, как и в предыдущем пункте. Требуется найти решение уравнения (4.43) при граничных условиях

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t), \quad (4.57)$$

где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  – заданные кусочно-непрерывные на  $[0, \infty)$  функции, и при начальном условии (4.45).

Как и в предыдущем пункте, ищем решение задачи в виде ряда (4.53). Повторяя проведенные выше рассуждения, получим уравнение

для  $T_n(t)$ :

$$T_n' + \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} T_n = \frac{2a^2 \pi n}{l^2} \left[ \varphi(t) - (-1)^n \psi(t) \right],$$

решение которого есть

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} + \frac{2a^2 \pi n}{l^2} \int_0^t e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} \tau} [\varphi(\tau) - (-1)^n \psi(\tau)] d\tau. \quad (4.58)$$

Чтобы выполнялось условие (4.45), требуем, чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x).$$

Вычисляя коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  по системе  $\left\{ \sin \frac{\pi n x}{l} \right\}$ , найдем:

$$T_n(0) = A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (4.59)$$

Следовательно, решение задачи (4.43), (4.45), (4.57) дается рядом (4.53), где  $T_n(t)$  определяются формулами (4.58), (4.59).

**9. Распространение тепла в стержне, в концах которого происходит свободный теплообмен с окружающей средой.** Задача состоит в отыскании решения  $u(x, t)$  уравнения (4.43) при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - hu \right]_{x=0} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - hu \right]_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

и при начальном условии (4.45).

Как и раньше, ищем частные решения уравнения (4.43), удовлетворяющие условиям (4.60), в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Подставляя в (4.43), получим:

$$XT' = a^2 X''T,$$

откуда

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda = \text{const},$$

следовательно,

$$-X'' = \lambda X, \quad (4.61)$$

$$-T' = a^2 \lambda T. \quad (4.62)$$

Чтобы выполнялись условия (4.60), нужно, чтобы

$$\left. \begin{aligned} X'(0) - hX(0) &= 0, \\ X'(l) - hX(l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

Мы получили задачу Штурма-Лиувилля (4.61), (4.63). Непосредственно можно убедиться, что все собственные значения этой задачи положительны. Поэтому решение уравнения (4.61) есть

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

В силу условий (4.63) имеем:

$$C_2 \sqrt{\lambda} - C_1 h = 0,$$

$$(-C_1 \sin \sqrt{\lambda} l + C_2 \cos \sqrt{\lambda} l) \sqrt{\lambda} + h(C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{C_1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{C_2}{h} \quad (4.64)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l = \frac{2\sqrt{\lambda} h}{\lambda - h^2}. \quad (4.65)$$

Положим:  $\mu = \sqrt{\lambda}$ . Тогда (4.65) примет вид

$$\operatorname{tg} \mu l = \frac{2\mu h}{\mu^2 - h^2}. \quad (4.65')$$

Найдя положительные корни этого уравнения, мы найдем собственные значения. Пусть  $\mu = \mu_n$  —  $n$ -ый положительный корень уравнения (4.65'); тогда  $\lambda_n = \mu_n^2$  есть  $n$ -ое собственное значение, и в силу (4.64) мы можем положить  $C_1 = \sqrt{\lambda_n}$ ,  $C_2 = h$ . Следовательно, для собственных функций получаем выражения

$$X_n(x) = \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + h \sin \sqrt{\lambda_n} x \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Полагая  $\lambda = \lambda_n$  в уравнении (4.62), найдем его решение:

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2 \lambda_n t} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, мы нашли частные решения

$$u_n(x, t) = A_n \left( \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + h \sin \sqrt{\lambda_n} x \right) e^{-a^2 \lambda_n t} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Общее решение задачи (4.43), (4.45), (4.60) ищем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + h \sin \sqrt{\lambda_n} x \right) e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (4.66)$$

так, чтобы выполнялось равенство

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + h \sin \sqrt{\lambda_n} x \right) = f(x).$$

Вычисляя коэффициенты Фурье функции  $f(x)$  по (ортогональной!) системе  $\left\{ \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + h \sin \sqrt{\lambda_n} x \right\}$ , будем иметь:

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.67)$$



Таким образом, решение задачи (4.43), (4.45), (4.60) дается рядом (4.66), где коэффициенты вычисляются по формулам (4.67).

Интеграл в знаменателе (4.67) можно найти интегрированием по частям с помощью уравнения (4.61) и граничных условий (4.63). Мы не будем приводить здесь вычислений. Укажем лишь конечный результат:

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{(\lambda_n + h^2)l + 2h}{2}.$$

## **ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.

2. Решите самостоятельно следующие задачи:

### Вариант 1

1. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} a, & 0 < x < h, \\ 0, & h \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[0, 2\pi]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

2. Разложить функцию  $f(x) = \cos x$  в ряд Фурье по синусам на отрезке  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4(2k+1)^2 - 1}.$$

3. Написать равенство Парсеваля для функции  $f(x) = \pi^2 - x^2$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ -e^{\alpha x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

и построить его график.

5. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1, \\ 2 - |x|, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

6. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

7. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

8. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \arccos x - \frac{\pi}{2}, & -1 < x \leq 0, \\ \arcsin x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

9. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ .

10. Разложить функцию  $f(x) = e^{-x}$  в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' - ay = \lambda y, \quad x \in [0, \pi], \quad a > 0$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0,$$

в интервале  $(0, \pi)$ .

## Вариант 2

1. Разложить функцию  $f(x) = x + 2$  в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-2, 2]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

2. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq h, \\ 0, & h < x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье по косинусам на отрезке  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh}$$



3. Написать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & 0 \leq x < \pi, \\ -e^{-ax}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - (-1)^n e^{a\pi} \right]^2 \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2}.$$

4. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

и построить его график.

5. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \sin x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

6. Найти косинус-преобразование Фурье функции  $f(x) = 2^{-x}$ .

7. Разложить функцию  $f(x) = x \arcsin x$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

8. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

9. Разложить функцию  $f(x) = x^5$  в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ .

10. Разложить функцию  $f(x) = l^2 - x^2$  в ряд Фурье по собствен-

ным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, l],$$

$$y(0) = y(l) = 0$$

в интервале  $(0, l)$ .

### Вариант 3

1. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < c, \\ 0, & -c < x \leq 0 \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-c, c]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

2. Разложить функцию  $f(x) = x(\pi - x)$  в ряд Фурье по синусам на отрезке  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

3. Написать равенство Парсеваля для функции  $f(x) = \sin ax$ ,  $a$  — не целое,  $x \in [-\pi, \pi]$  и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 - n^2)^2}.$$

4. Найти интеграл Фурье функции  $f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x$ ,  $\alpha > 0$  и построить его график.

5. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \{-\infty < x < 0\} \cup \{1 < x < \infty\}. \end{cases}$$

6. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a, \\ 2a - x, & a < x \leq 2a, \\ 0, & x > 2a. \end{cases}$$

7. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .



8. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1,1)$ .

9. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x \leq 0, \\ 3x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1,1)$ .

10. Разложить функцию  $f(x) = \cos x$  в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' - y = \lambda y, \quad x \in [0, 2],$$

$$y'(0) = y'(2) = 0,$$

в интервале  $(0, 2)$ .

## Вариант 4

1. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

2. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 2h, \\ x - 2h, & 2h < x < \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье по косинусам на отрезке  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nh}{(nh)^2}.$$

3. Написать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ -\cos x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}.$$

4. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 2, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a, \\ 0, & x > b \end{cases}$$

и построить его график.

5. Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = e^{-|x|} \cos \omega x$ .

6. Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

7. Разложить функцию  $f(x) = x^5$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

8. Разложить функцию  $f(x) = x \arcsin x$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

9. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ .

10. Разложить функцию  $f(x) = x - 2\pi$  в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, 2\pi],$$

$$y(0) = 0,$$

$$y'(2\pi) + y(2\pi) = 0$$

в интервале  $(0, 2\pi)$ .

### Вариант 5

1. Разложить функцию  $f(x) = e^{|x|}$  в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-1, 1]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

2. Разложить функцию  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$  в ряд Фурье по синусам на отрезке  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots$$



3. Написать равенство Парсеваля для функции  $f(x) = x \sin x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2}.$$

4. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

и построить его график.

5. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x \cos x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

6. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

7. Разложить функцию  $f(x) = |x|$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

8. Разложить функцию  $f(x) = x^3$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1,1)$ .

9. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1,1)$ .

10. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, 4],$$

$$y'(0) = y(4) = 0$$

в интервале  $(0, 4)$ .

## ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

### 1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 1

#### Задание

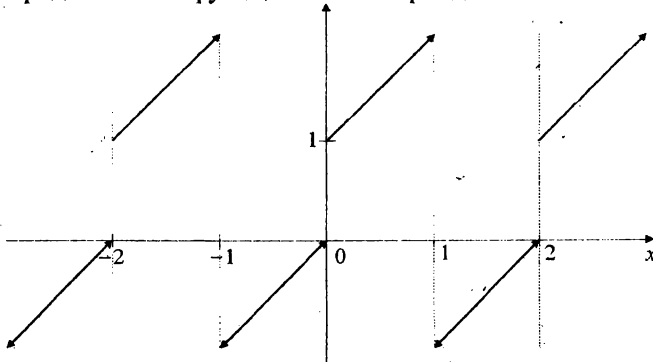
Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-1, 1]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

#### Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                        | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.       | Нарисовать график функции, продолжив ее периодически с периодом $2\pi$ или $2l$ на всю ось.     | <p>Продолженная функция имеет период <math>T = 2</math>.</p>                                                                                              |
| 2.       | Проверить условия достаточных признаков сходимости ряда Фурье (Дини-Липшица, Жордана, Дирихле). | <p>Функция <math>f(x)</math> кусочно-монотонна на отрезке <math>[-1, 1]</math>: она возрастает на <math>(-1, 0)</math> и на <math>(0, 1)</math>. В точках <math>x = \pm 1</math>, <math>x = 0</math> функция имеет разрывы первого рода.</p> |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.       | Выяснить четность или нечетность функции.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Функция не является ни четной, ни нечетной.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 4.       | <p>Вычислить коэффициенты Фурье по формулам:</p> <p>а) если функция задана на <math>(-\pi, \pi)</math></p> $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx$ <p><math>(n = 0, 1, 2, \dots)</math>,</p> <p>б) если функция задана на <math>(-l, l)</math></p> $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$ <p><math>(n = 1, 2, \dots)</math>.</p> | $a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos \pi n x dx =$ $= \int_{-1}^0 x \cos \pi n x dx + \int_0^1 (x+1) \cos \pi n x dx =$ $= \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, & n = 0 \\ \frac{1 - (-1)^n}{\pi^2 n^2} + \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}, & n \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$ $b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin \pi n x dx =$ $= \int_{-1}^0 x \sin \pi n x dx + \int_0^1 (x+1) \sin \pi n x dx =$ $= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} + 1}{\pi n} = \frac{3 \cdot (-1)^{n+1} + 1}{\pi n}.$ |
| 5.       | Составить ряд Фурье функции $f(x)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \pi n x.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 6.       | Указать функцию, к которой будет сходиться этот ряд, пользуясь поточечными признаками сходимости.                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>Согласно признаку Дирихле ряд Фурье функции <math>f(x)</math> сходится к сумме:</p> $g(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0, \\ x+1, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = \pm 1. \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

Решить самостоятельно:

1.1. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x \leq 0, \\ 5, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

1.2. Разложить функцию  $f(x) = x^2$  в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[0, 3]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

1.3. Разложить функцию  $f(x) = 10 - x$  в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[5, 15]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.



1.4. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} a, & |x| < h, \\ 0, & h \leq |x| \leq \pi \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

1.5. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & 0 < x < 2, \\ x + 1, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-2, 2]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

## 2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 2

### Задание

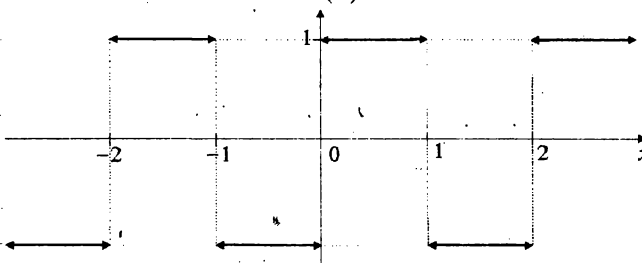
Разложить функцию  $f(x) = 1$ ,  $x \in (0, 1)$ , в ряд Фурье по синусам на  $[0, 1]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

### Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| № п/п | Алгоритм                                                                                                                                                   | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                       |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Продолжить функцию четным (нечетным) образом на $(-\pi, 0)$ или $(-l, 0)$ , а затем периодически с периодом $2\pi$ или $2l$ продолжить функцию на всю ось. | Продолжим функцию нечетным образом на $(-1, 0)$ , а затем периодически, с периодом $T = 2$ , продолжим ее на всю ось. |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                     | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2.       | Нарисовать график периодического продолжения.                                                                                | Мы получим функцию $f^*(x)$ вида:<br>                                                                                                                                                                             |
| 3.       | Проверить условия достаточных признаков сходимости ряда Фурье (Дини-Липшица, Жордана, Дирихле).                              | Функция $f^*(x)$ кусочно-постоянна в промежутке $(-1, 1)$ : она равна $-1$ на $(-1, 0)$ и $1$ на $(0, 1)$ . В точках $x = \pm 1$ , $x = 0$ функция имеет разрывы первого рода.                                                                                                                     |
| 4.       | Вычислить коэффициенты Фурье:<br>$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$ $(n = 1, 2, \dots),$ $a_n = 0.$ | Ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:<br>$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin \pi n x dx =$ $= 2 \int_0^1 \sin \pi n x dx = -\frac{2}{\pi n} (\cos \pi n - 1) =$ $= 2 \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4}{\pi n}, & n = 2k - 1. \end{cases}$                     |
| 5.       | Составить ряд Фурье функции $f(x)$ .                                                                                         | $f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}.$                                                                                                                                                                                                                        |
| 6.       | Указать функцию, к которой будет сходиться этот ряд, пользуясь поточечными признаками сходимости.                            | Согласно признаку Дирихле ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к сумме:<br>$g(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, x = \pm 1. \end{cases}$ <p>Следовательно, при <math>x \in (0, 1)</math></p> $1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$ |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                         | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7.       | Подставив значения $x$ , указать сумму заданного числового ряда. | <p>Полагая в полученном разложении <math>x = \frac{1}{2}</math>, найдем</p> $1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n-1}{2} \pi}{2n-1},$ <p>откуда, так как <math>\sin \frac{2n-1}{2} \pi = (-1)^{n-1}</math>,</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$ |

*Решить самостоятельно:*

2.1. Разложить функцию  $f(x) = \sin x$  в ряд Фурье по косинусам на  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

2.2. Разложить функцию  $f(x) = x \sin x$  в ряд Фурье по синусам на  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{\left(4(2k+1)^2 - 1\right)^2}.$$

2.3. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h}, & 0 \leq x \leq 2h, \\ 0, & 2h < x \leq \pi \end{cases}$$

в ряд Фурье по косинусам на  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2.$$

2.4. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{c}, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h}{1-c}(1-x), & c < x \leq 1, \end{cases} \quad 0 < c < 1,$$

в ряд Фурье по синусам на  $[0, 1]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi n c}{(\pi n c)^2}.$$

2.5. Разложить функцию  $f(x) = \cos x$  в ряд Фурье по косинусам

на  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

### 3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 3

#### Задание

Написать равенство Парсеваля для функции  $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}.$$

#### Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| № п/п | Алгоритм                                                                                     | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                          |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Установить, является ли данная функция функцией с интегрируемым квадратом на $[-\pi, \pi]$ . | Функция $f(x)$ непрерывна, а, следовательно, интегрируема на $[-\pi, \pi]$ . По той же причине ее квадрат интегрируем на $[-\pi, \pi]$ . |

| № п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                                     | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2.    | <p>Вычислить коэффициенты Фурье по формулам:</p> $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ $(n = 0, 1, 2, \dots),$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ $(n = 1, 2, \dots)$ | <p>Так как <math>f(x)</math> нечетная функция, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:</p> $a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx =$ $= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi^2 - x^2) \sin nx dx =$ $= -\frac{2}{\pi n} \left[ x(\pi^2 - x^2) \cos nx \right]_0^{\pi} +$ $+ \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} (\pi^2 - 3x^2) \cos nx dx =$ $= \frac{2}{\pi n^2} \left[ (\pi^2 - 3x^2) \sin nx \right]_0^{\pi} +$ $+ \frac{12}{\pi n^2} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{12}{\pi n^3} [x \cos nx]_0^{\pi} +$ $+ \frac{12}{\pi n^3} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 12 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ $(n = 1, 2, \dots).$ |
| 3.    | <p>Вычислить интеграл <math>\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx</math>.</p>                                                                                                                            | $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 (\pi^2 - x^2)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^4 x^2 - 2\pi^2 x^4 + x^6) dx =$ $= \frac{2}{3} \pi^6 - \frac{4}{5} \pi^6 + \frac{2}{7} \pi^6 = \frac{16}{105} \pi^6$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 4.    | <p>Написать формулу Парсеваля:</p> $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) =$ $= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$                                                                   | <p>Таким образом, формула Парсеваля имеет вид</p> $144 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{16}{105} \pi^6$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |



| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                           | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                      |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5.       | Произведя, если требуется, арифметические действия в правой и левой частях, получить сумму данного числового ряда. | Разделив обе части полученного равенства на 144, найдем:<br>$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$ |

*Решить самостоятельно:*

3.1. Написать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

3.2. Написать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

3.3. Написать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in [-\pi, \pi] \text{ и, исходя из этого равенства, най-}$$

ти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}.$$

3.4. Написать равенство Парсеваля для функции  $f(x) = \cos ax$ ,

$a$  – не целое,  $x \in [-\pi, \pi]$  и; исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 - n^2)^2}.$$

3.5. Написать равенство Парсеваля для функции  $f(x) = e^{ax}$ ,

$a \neq 0$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}.$$

#### 4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 4

##### Задание

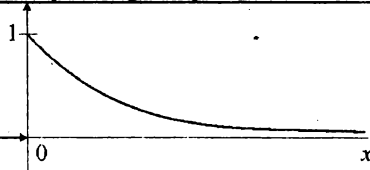
Найти интеграл Фурье функции

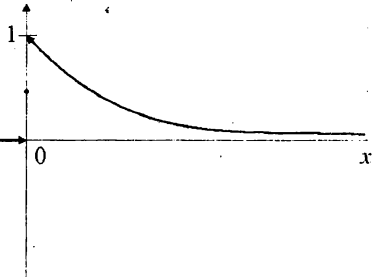
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

и построить его график.

##### Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                     | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.       | Построить график функции $f(x)$ .                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 2.       | Проверить выполнение условий достаточных признаков сходимости интеграла Фурье (Дини, Дирихле-Жордана или следствий из них).                                                  | Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$ , непрерывна при $x > 0$ и $x < 0$ , а в точке $x = 0$ имеет разрыв первого рода. Далее, при $x > 0$ и $x < 0$ функция $f(x)$ имеет конечную производную, а в нуле существуют конечные правая и левая производные.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 3.       | Выяснить четность или нечетность функции.                                                                                                                                    | Функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 4.       | <p>Вычислить коэффициенты по формулам:</p> $a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(u) \cos \lambda u du,$ $b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(u) \sin \lambda u du.$ | <p>Имеем:</p> $\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^x e^{-au} \cos \lambda u du = \\ &= -\frac{1}{\pi \alpha} - \frac{\lambda}{\pi \alpha} \int_0^x e^{-au} \sin \lambda u du = \\ &= -\frac{1}{\pi \alpha} - \frac{\lambda^2}{\pi \alpha^2} \int_0^x e^{-au} \cos \lambda u du = \\ &= -\frac{1}{\pi \alpha} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} a(\lambda), \\ b(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^x e^{-au} \sin \lambda u du = \frac{\lambda}{\alpha} a(\lambda), \end{aligned}$ <p>откуда</p> $a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2}.$ |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                        | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                                                                                                 |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5.       | <p>Записать интеграл Фурье функции <math>f(x)</math>:</p> $f(x) \sim \int_0^x (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda$ | $f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\alpha \cos \lambda x + \lambda \sin \lambda x}{\alpha^2 + \lambda^2} d\lambda$                                                                                         |
| 6.       | <p>Указать функцию, к которой будет сходиться интеграл Фурье, пользуясь поточечными признаками сходимости.</p>                                  | <p>Согласно следствию из признака Дини интеграл Фурье функции <math>f(x)</math> сходится всюду к функции</p> $g(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$ |
| 7.       | <p>Построить график полученной функции</p>                                                                                                      |                                                                                                                               |

Решить самостоятельно:

4.1. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

и построить его график.

4.2. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

и построить его график.

4.3. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < \infty, \\ 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

и построить его график.

4.4. Найти интеграл Фурье функции  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ ,  $\alpha > 0$ , и построить его график.



4.5. Найти интеграл Фурье функции  $f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x$ ,  $\alpha > 0$ , и построить его график.

## 5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 5

### Задание

Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & x > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

## Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| № п/п | Алгоритм                                                                                                                                               | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Проверить, будет ли заданная функция абсолютно интегрируемой на всей оси (в случае косинус- или синус-преобразования – на полупрямой $[0, +\infty)$ ). | Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на полупрямой $[0, +\infty)$ , что следует из ее непрерывности на этом промежутке.                                                                                                                                                                                          |
| 2.    | Вычислить преобразование Фурье по формуле:<br>$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x f(u) \sin \lambda u du.$                                   | Ее синус-преобразование Фурье есть<br>$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/4} (4u-1) \sin \lambda u du =$ $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -\frac{1}{\lambda} + \frac{4}{\lambda} \int_0^{1/4} \cos \lambda u du \right] =$ $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4 \sin \frac{\lambda}{4} - \lambda}{\lambda^2}$ |

*Решить самостоятельно:*

5.1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

5.2. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

5.3. Найти синус-преобразование Фурье функции  $f(x) = 3^{-x}$ .

5.4. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

5.5. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ 1, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

## 6. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 6

### Задание

Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

### Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.       | <p>Проверить, выполнены ли для <math>f(x)</math> достаточные условия сходимости ряда Фурье-Чебышева в некоторой точке отрезка <math>[-1, 1]</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                         | <p>Функция <math>f(x)</math> непрерывна всюду в <math>(-1, 1)</math>, кроме точки <math>x = 0</math>, где она имеет разрыв первого рода. При <math>x \in (-1, 0)</math> или <math>(0, 1)</math> она удовлетворяет условию</p> $ f(t) - f(x)  \leq  t - x , \quad t \in (x - \delta, x + \delta),$ <p>которое выглядит так:</p> $0 \leq  t - x ,$ <p>а в точке <math>x = 0</math> – условиям</p> $ f(t) - f(0+0)  \leq  t , \quad 0 < t < \delta$ <p>и</p> $ f(t) - f(0-0)  \leq  t , \quad -\delta < t < 0:$ $0 \leq  t  \text{ при } 0 < t < \delta \text{ или } -\delta < t < 0.$ |
| 2.       | <p>Сделав замену переменной <math>x = \cos \theta</math>, ввести вспомогательную функцию</p> $F(\theta) = f(\cos \theta)$ <p>и разложить ее в ряд Фурье по косинусам на <math>[0, \pi]</math></p> $F(\theta) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta,$ $\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\theta) \cos n\theta d\theta,$ $n = 0, 1, 2, \dots$ | $F(\theta) = f(\cos \theta) = \begin{cases} 2, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi. \end{cases}$ <p>Коэффициенты ряда Фурье функции <math>F(\theta)</math> есть:</p> $\alpha_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos n\theta d\theta =$ $= \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 0, & n = 2k, \\ \frac{4}{\pi(2k-1)} (-1)^{k-1}, & \end{cases}$ $k = 1, 2, \dots,$ <p>а ее ряд Фурье:</p> $F(\theta) \sim 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2k-1)\theta.$                            |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                                                               |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.       | <p>Вернуться к переменной <math>x</math> и получить разложение <math>f(x)</math> в ряд Фурье по полиномам Чебышева <math>T_n(x) = \cos(n \arccos x)</math> на <math>[-1, 1]</math>:</p> $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x),$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ | <p>Отсюда</p> $f(x) \sim 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} T_{2n-1}(x)$                                                                           |
| 4.       | <p>Ряд Фурье по полиномам Чебышева сходится в точке <math>x</math> к сумме</p> $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ <p>(или к <math>f(x)</math>, если <math>x</math> – точка непрерывности функции).</p>                                                                                                           | <p>Ряд Фурье по полиномам Чебышева функции <math>f(x)</math> сходится к сумме</p> $g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ |

*Решить самостоятельно:*

6.1. Разложить функцию  $f(x) = x^3$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

6.2. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

6.3. Разложить функцию  $f(x) = x \arccos x$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

6.4. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .

6.5. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arcsin x, & -1 \leq x \leq 0, \\ \arccos x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$ .



## 7. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 7

### Задание

Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

### Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| № п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Проверить, выполнены ли для $f(x)$ достаточные условия сходимости ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода в некоторой точке интервала $(-1, 1)$ .                                                                                                                                                                                           | Функция $f(x)$ непрерывна всюду в $(-1, 1)$ и, очевидно, удовлетворяет в этом интервале условию Липшица порядка $\alpha = 1$ :<br>$ f(t) - f(x)  \leq  t - x , \quad t \in (x - \delta, x + \delta)$ для всякого фиксированного $x \in (-1, 1)$ .                                                                                                                                              |
| 2.    | Сделав замену переменной $x = \cos \theta$ , ввести вспомогательную функцию<br>$\Phi(\theta) = \sin \theta \cdot f(\cos \theta)$<br>и разложить ее в ряд Фурье по синусам на $(0, \pi)$ :<br>$\Phi(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta,$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\theta) \sin n\theta \, d\theta,$ $n = 1, 2, \dots$ | Введем вспомогательную функцию<br>$\Phi(\theta) = \begin{cases} \sin \theta \cos \theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi. \end{cases}$ и найдем коэффициенты ее ряда Фурье по синусам:<br>$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \sin n\theta \, d\theta =$ $= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \sin n\theta \, d\theta =$ |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                       | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                                                                                                                                | $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} [\cos(n-2)\theta - \cos(n+2)\theta] d\theta =$ $= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin \frac{\pi(n-2)}{2}}{n-2} - \frac{\sin \frac{\pi(n+2)}{2}}{n+2} \right] =$ $= -\frac{2 \sin \frac{\pi n}{2}}{\pi(n^2-4)} = \begin{cases} 0, & n=2k \neq 2, \\ \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2-4}, & n=2k+1, \end{cases}$ $k=0, 1, 2, \dots,$ $b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta =$ $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4}.$ <p>Ряд Фурье функции <math>\Phi(\theta)</math> есть</p> $\Phi(\theta) \sim \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2-4} \sin(2k+1)\theta.$ |
| 3.       | <p>Представить функцию <math>f(\cos \theta)</math> в виде ряда</p> $f(\cos \theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ <p><math>(0 &lt; \theta &lt; \pi)</math></p> | <p>Отсюда</p> $f(\cos \theta) \sim$ $\sim \frac{1}{4} \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2-4} \frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin \theta}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 4.       | <p>Вернуться к переменной <math>x</math> и получить разложение <math>f(x)</math> в ряд по полиномам Чебышева второго рода</p>                                                                  | <p>Следовательно,</p> $f(x) \sim \frac{1}{4} U_1(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2-4} U_{2k}(x).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                                                                    | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                      |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          | $U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$ <p>в интервале <math>(-1, 1)</math>:</p> $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(x),$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) U_n(t) \sqrt{1-t^2} dt,$ $n = 0, 1, 2, \dots$               |                                                                                                                                      |
| 5.       | <p>Ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода сходится в точке <math>x</math> интервала <math>(-1, 1)</math> к сумме</p> $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ <p>(или к <math>f(x)</math>, если <math>x</math> – точка непрерывности функции).</p> | <p>Ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода функции <math>f(x)</math> сходится к ней всюду в интервале <math>(-1, 1)</math>.</p> |

*Решить самостоятельно:*

7.1. Разложить функцию  $f(x) = x^2$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

7.2. Разложить функцию  $f(x) = \arcsin x$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1,1)$ .

7.3. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1,1)$ .

7.4. Разложить функцию  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1,1)$ .

7.5. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x-1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1,1)$ .

## 8. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 8

### Задание

Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1,1)$ .

### Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| № п/п | Алгоритм                                                                                                                                  | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Проверить, выполнены ли для $f(x)$ достаточные условия сходимости ряда Фурье по полиномам Лежандра в некоторой точке интервала $(-1,1)$ . | <p>Функция <math>f(x)</math> непрерывна всюду в <math>(-1,1)</math>, кроме точки <math>x = 0</math>, где она имеет разрыв первого рода. При <math>x \in (-1,0)</math> или <math>(0,1)</math> она удовлетворяет условию</p> $ f(t) - f(x)  \leq  t - x , \quad t \in (x - \delta, x + \delta),$ <p>которое выглядит так:</p> $0 \leq  t - x ,$ <p>а в точке <math>x = 0</math> – условиям</p> $ f(t) - f(0+0)  \leq  t , \quad 0 < t < \delta$ <p>и</p> |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                          | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                                                                                                                   | $ f(t) - f(0-0)  \leq  t , \quad -\delta < t < 0:$<br>$0 \leq  t  \text{ при } 0 < t < \delta \text{ или } -\delta < t < 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 2.       | <p>Вычислить коэффициенты Фурье-Лежандра по формулам:</p> $a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt,$ <p>где</p> $P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$ | <p>Коэффициенты Фурье-Лежандра функции <math>f(x)</math> будут:</p> $a_n = \frac{2n+1}{2} \left[ - \int_{-1}^0 P_n(x) dx + \int_0^1 P_n(x) dx \right].$ <p>Заметим, что так как функция <math>f(x)</math> нечетная, то все коэффициенты с четными индексами будут равны нулю, в силу того, что четность полиномов <math>P_n(x)</math> совпадает с четностью <math>n</math>. Поэтому достаточно вычислить коэффициенты с индексами <math>n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots:</math></p> $a_1 = 3 \int_0^1 P_1(x) dx = 3 \int_0^1 x dx = \frac{3}{2},$ $a_{2k+1} = (2(2k+1)+1) \int_0^1 P_{2k+1}(x) dx =$ $= \int_0^1 [P'_{2k+2}(x) - P'_{2k}(x)] dx =$ $= [P_{2k+2}(x) - P_{2k}(x)]_0^1 =$ $= (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} - (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} =$ $= (-1)^k \frac{(2k-1)!!(4k+3)}{(2k+2)!!}, \quad k = 1, 2, \dots$ |
| 3.       | <p>Составить ряд Фурье-Лежандра функции <math>f(x)</math>:</p> $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x).$                                                                        | <p>Отсюда</p> $f(x) \sim \frac{3}{2} P_1(x) +$ $+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!(4k+3)}{(2k+2)!!} P_{2k+1}(x).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                                          | Конкретное соответствие данной<br>ситуации предложенному алгоритму                                                                                                                                        |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.       | <p>Ряд Фурье-Лежандра сходится в точке <math>x</math> интервала <math>(-1, 1)</math> к сумме</p> $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ <p>(или к <math>f(x)</math>, если <math>x</math> – точка непрерывности функции).</p> | <p>Ряд Фурье по полиномам Лежандра функции <math>f(x)</math> сходится в интервале <math>(-1, 1)</math> к сумме</p> $g(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ |

*Решить самостоятельно:*

8.1. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ .

8.2. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$



в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ .

8.3. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ .

8.4. Разложить функцию

$$f(x) = x^4$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1,1)$ .

8.5. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq -\frac{1}{2}, \\ x + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1,1)$ .

## 9. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 9

### Задание

Разложить функцию  $f(x) = x$  в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, \pi],$$

$$y'(0) = y(\pi) = 0$$

в интервале  $(0, \pi)$ .

### Решение

Заполнить таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

| № п/п | Алгоритм                       | Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Решить задачу Штурма-Лиувилля. | <p>Найдем общее решение дифференциального уравнения. Составим характеристическое уравнение:</p> $-k^2 = \lambda,$ <p>откуда</p> $k = \pm i\sqrt{\lambda}.$ <p>Если <math>\lambda &lt; 0</math>, то решением будет</p> $y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$ <p>Подставив в краевые условия, найдем:</p> $y'(0) = C_1 \sqrt{-\lambda} - C_2 \sqrt{-\lambda} = 0,$ $y(\pi) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0.$ <p>Отсюда</p> |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                    | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                                                                                                                             | $y(\pi) = C_1 \left( e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \right) = 0,$ <p>а значит, <math>C_1 = C_2 = 0</math>. Следовательно, <math>y(x) \equiv 0</math>,<br/>что не является решением задачи Штурма-<br/>Лиувилля.</p> <p>Если <math>\lambda = 0</math>, то</p> $y(x) = C_1 + C_2 x,$ <p>откуда, подставив в краевые условия, найдем:<br/><math>C_1 = C_2 = 0</math>.</p> <p>Следовательно, <math>\lambda &gt; 0</math> и</p> $y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$ <p>Далее,</p> $y'(0) = C_2 \sqrt{\lambda} = 0,$ <p>а следовательно,</p> $C_2 = 0,$ <p>и</p> $y(\pi) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} \pi = 0,$ <p>откуда <math>C_1 \neq 0</math> и</p> $\lambda_n = \left( n + \frac{1}{2} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ <p>Положив <math>C_1 = 1</math>, получим</p> $y(x, \lambda_n) = \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x.$ |
| 2.       | Проверить доста-<br>точные условия по-<br>точечной сходимос-<br>ти в интервале<br>(a,b) ряда Фурье<br>по собственным<br>функциям задачи<br>Штурма-Лиувилля. | Функция $f(x)$ непрерывна и дважды непре-<br>рывно дифференцируема на отрезке $[0, \pi]$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

| №<br>п/п | Алгоритм                                                                                                                                                                                                                              | Конкретное соответствие данной ситуации<br>предложенному алгоритму                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.       | <p>Вычислить коэффициенты Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля <math>\{y(x, \lambda_n)\}</math>:</p> $c_n = \frac{\int_a^b f(x) y(x, \lambda_n) dx}{\ y(x, \lambda_n)\ ^2}$ <p><math>(n = 0, 1, 2, \dots)</math></p>  | <p>Найдем коэффициенты Фурье:</p> $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx =$ $= \frac{4}{\pi(2n+1)} \left[ x \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right]_0^\pi -$ $- \frac{4}{\pi(2n+1)} \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x dx =$ $= \frac{4(-1)^n}{(2n+1)} + \frac{8}{\pi(2n+1)^2} \left[ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right]_0^\pi =$ $= \frac{4(-1)^n}{(2n+1)} - \frac{8}{\pi(2n+1)^2}$ |
| 4.       | <p>Составить ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля:</p> $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n y(x, \lambda_n).$                                                                                                       | <p>Ряд Фурье функции <math>f(x)</math> есть:</p> $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4(-1)^n}{2n+1} - \frac{8}{\pi(2n+1)^2} \right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x.$                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 5.       | <p>Ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля сходится для <math>a &lt; x &lt; b</math> к сумме <math>f(x)</math> в каждой точке непрерывности и к сумме</p> $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ <p>в каждой точке разрыва.</p> | <p>Ряд сходится к функции <math>f(x)</math> всюду в интервале <math>(0, \pi)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

Решить самостоятельно:

9.1. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' + y = \lambda y, \quad x \in [0, 1],$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

в интервале  $(0, 1)$ .

9.2. Разложить функцию  $f(x) = \sin x$  в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, 2],$$

$$y(0) = y'(2) = 0$$

в интервале  $(0, 2)$ .

9.3. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

в интервале  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

9.4. Разложить функцию  $f(x) = x^2$  в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' + 2y = \lambda y, \quad x \in [0, 3],$$

$$y'(0) = y(3) = 0$$

в интервале  $(0, 3)$ .



9.5. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ b, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, 1],$$

$$y'(0) = 0,$$

$$y'(1) + y(1) = 0$$

в интервале  $(0, 1)$ .

# ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ

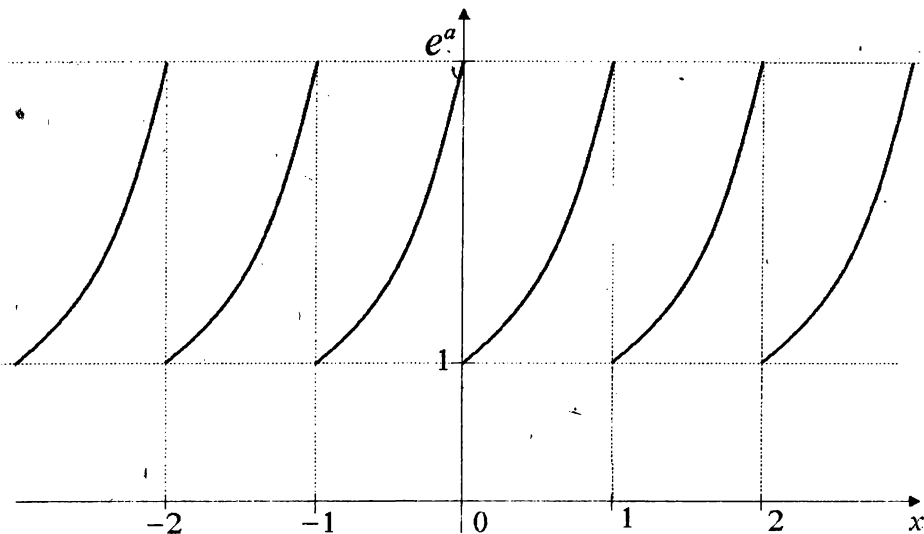
## ПРИМЕРЫ ОТРАБОТКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Тригонометрические ряды Фурье

Данной теме посвящена глава 1 Тематического обзора. Поэтому перед решением следующих примеров следует прочесть материал этой главы.

**Пример 1.** Разложить функцию  $f(x) = e^{ax}$ ,  $a \neq 0$ , в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[0, 1]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

*Решение.* Продолжим функцию периодически с периодом 1 на всю числовую ось. Продолженная функция  $f^*(x)$  имеет разрывы первого рода в точках  $x = k$ ,  $k$  – целое, и непрерывна в остальных точках прямой. Ее график имеет вид:



Очевидно, функция  $f(x)$  кусочно-дифференцируема на  $[0, 1]$ . Она не является ни четной, ни нечетной, поэтому ее коэффициенты Фурье

вычисляются по формулам:

$$a_0 = 2 \int_0^1 e^{ax} dx = \frac{2(e^a - 1)}{a};$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 e^{ax} \cos 2\pi n x dx = \frac{2}{a}(e^a - 1) + \frac{4\pi n}{a} \int_0^1 e^{ax} \sin 2\pi n x dx = \\ &= \frac{2}{a}(e^a - 1) - \frac{8\pi^2 n^2}{a^2} \int_0^1 e^{ax} \cos 2\pi n x dx = \frac{2}{a}(e^a - 1) - \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} a_n, \\ \Rightarrow a_n &= \frac{2a(e^a - 1)}{a^2 + 4\pi^2 n^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 e^{ax} \sin 2\pi n x dx = -\frac{4\pi n}{a} \int_0^1 e^{ax} \cos 2\pi n x dx = -\frac{2\pi n}{a} a_n, \\ \Rightarrow b_n &= \frac{4\pi n(1 - e^a)}{a^2 + 4\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье функции  $f(x)$  имеет вид:

$$\frac{e^a - 1}{a} + 2(e^a - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \cos 2\pi n x - \frac{2\pi n}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \sin 2\pi n x \right).$$

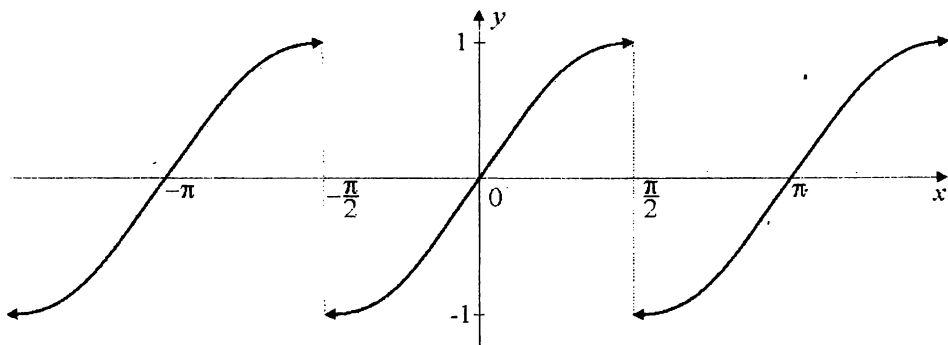
Согласно признаку Дини-Липшица ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к ней всюду в  $(0,1)$ , а в точках  $x=0$  и  $x=1$  сходится к значению

$\frac{e^a + 1}{2}$ . Таким образом, сумма ряда имеет вид:

$$g(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \in (0,1), \\ \frac{e^a + 1}{2}, & x = 0, x = 1. \end{cases}$$

**Пример 2.** Разложить функцию  $f(x) = \sin x$  в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

*Решение.* Продолжим функцию периодически с периодом  $\pi$  на всю числовую ось. Продолженная функция  $f^*(x)$  имеет разрывы первого рода в точках  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k$  – целое, и непрерывна в остальных точках прямой. Ее график имеет вид:



Очевидно, функция  $f(x)$  кусочно-дифференцируема на  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Она нечетная, поэтому ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x] dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} - \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} (-1)^{n-1} \left[ \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^{n-1} n}{4n^2 - 1}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции  $f(x)$  имеет вид:

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{4n^2 - 1} \sin 2nx.$$

По признаку Дини-Липшица ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к ней всюду в интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , а в точках  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  сходится к 0. Следовательно, сумма ряда Фурье есть

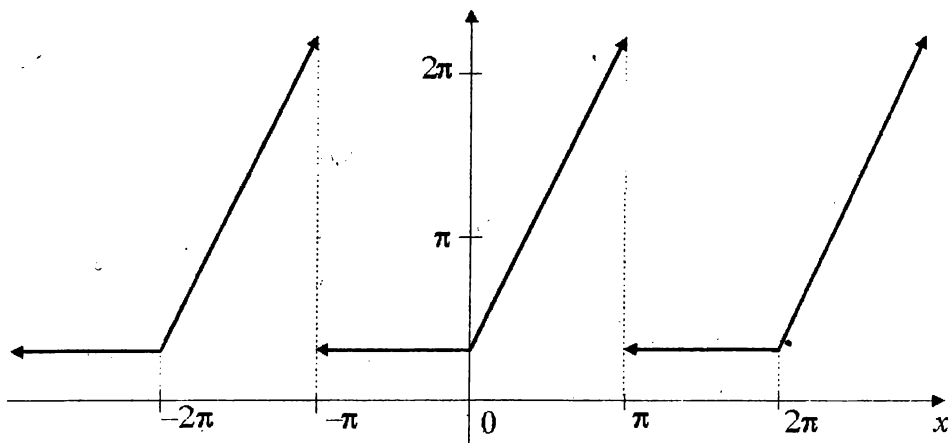
$$g(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x = \pm \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Пример 3.** Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0 \leq x < \pi, \\ 1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

в тригонометрический ряд Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и указать функцию, к которой сходится полученный ряд.

*Решение.* Продолжим функцию периодически с периодом  $2\pi$  на всю числовую ось. Продолженная функция  $f^*(x)$  имеет разрывы первого рода в точках  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k$  – целое, и непрерывна в остальных точках прямой. Ее график имеет вид:



Очевидно, функция  $f(x)$  кусочно-монотонна на  $[-\pi, \pi]$ . Она не является ни четной, ни нечетной, поэтому ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} (2x+1) dx \right] = 2 + \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \cos nxdx + \int_0^{\pi} (2x+1) \cos nxdx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2x+1) \cos nxdx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nxdx = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \sin nxdx + \int_0^{\pi} (2x+1) \sin nxdx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \sin nxdx + 2 \int_0^{\pi} x \sin nxdx \right] = \frac{2}{n} (-1)^{n-1} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nxdx = \frac{2}{n} (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье функции  $f(x)$  имеет вид:

$$1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

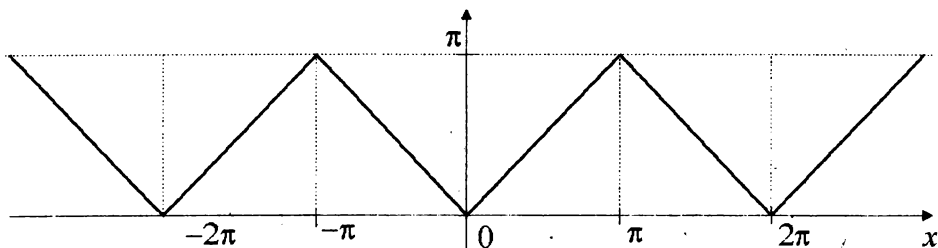
По признаку Дирихле сумма ряда Фурье функции  $f(x)$  есть

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 0 \leq x < \pi, \\ 1, & -\pi < x < 0, \\ \pi + 1, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

**Пример 4.** Разложить функцию  $f(x) = x$  в ряд Фурье по косинусам на отрезке  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

*Решение.* Чтобы получить разложение по косинусам, продолжим  $f(x)$  на  $[-\pi, 0]$  четным образом, а затем периодически, с периодом  $2\pi$ , продолжим ее на всю ось. Мы получим функцию вида:



Продолженная функция – непрерывная и кусочно-дифференцируемая. Поэтому по признаку Дини-Липшица ее ряд Фурье сходится всюду на  $[0, \pi]$  к  $f(x)$ .

Вычисляя коэффициенты Фурье, найдем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = 2 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2 \pi},$$

т.е.

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Полагая  $x=0$ , мы получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Пример 5.** Разложить функцию

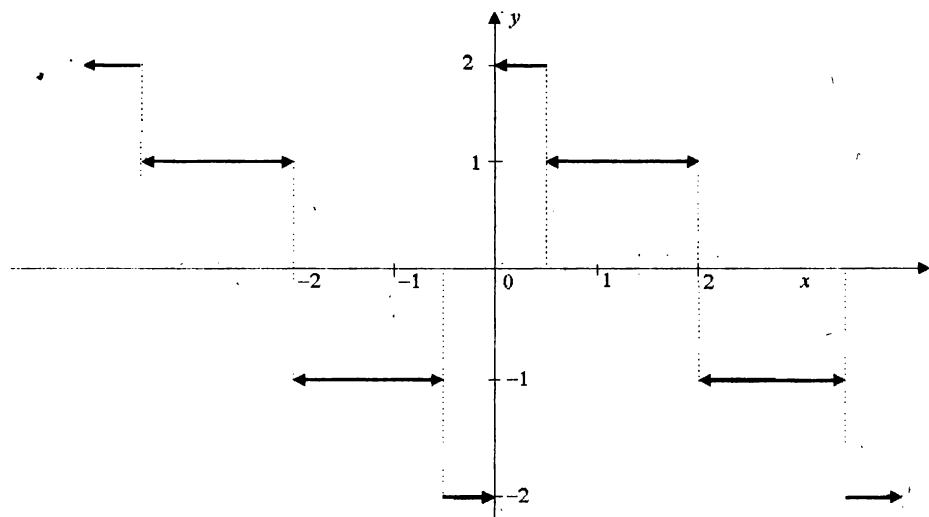
$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq \frac{1}{4}, \\ 1, & \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases}$$

в ряд Фурье по синусам на отрезке  $[0,1]$  и с помощью этого разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k \sqrt{2} - 6) \frac{4k+2}{(4k+1)(4k+3)}.$$

**Решение.** Чтобы получить разложение по синусам, продолжим  $f(x)$  на  $(-1,0)$  нечетным образом, а затем периодически, с периодом 2, продолжим ее на всю ось. Мы получим функцию вида:





Продолженная функция кусочно-постоянна в интервале  $(-1, 1)$ . В точках  $x = \pm 1$ ,  $x = \pm \frac{1}{4}$ ,  $x = 0$  функция имеет разрывы первого рода.

Вычислим коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ :

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_0^1 f(x) \sin \pi n x \, dx = 2 \left[ 2 \int_0^{1/4} \sin \pi n x \, dx + \int_{1/4}^1 \sin \pi n x \, dx \right] = \\
 &= -2 \left[ 2 \frac{\cos \frac{\pi n}{4} - 1}{\pi n} + \frac{(-1)^n - \cos \frac{\pi n}{4}}{\pi n} \right] = -2 \frac{\cos \frac{\pi n}{4} - 2 + (-1)^n}{\pi n}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, ряд Фурье функции  $f(x)$  имеет вид:

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{4} - 2 + (-1)^n}{\pi n} \sin \pi n x.$$

По признаку Дирихле он сходится к сумме

$$g(x) = \begin{cases} 2; & 0 < x < \frac{1}{4}, \\ 1, & \frac{1}{4} < x < 1, \\ \frac{3}{2}, & x = \frac{1}{4}, \\ 0, & x = 0, \quad x = 1. \end{cases}$$

Полагая  $x = \frac{1}{2}$ , получим:

$$1 = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{4} - 2 + (-1)^n}{n} \sin \frac{\pi n}{2} = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos \frac{\pi(2m+1)}{4} - 3}{2m+1},$$

так как

$$\sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ (-1)^m, & n = 2m+1. \end{cases}$$

Далее, разобьем последнюю сумму на две: при  $m = 2k$  и при  $m = 2k+1$ .  
Получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(4k+1)}{4} - 3}{4k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(4k+3)}{4} - 3}{4k+3} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} - 3}{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} - 3}{4k+3} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \right] \left[ \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (-1)^k \sqrt{2} - 6 \right] \frac{4k+2}{(4k+1)(4k+3)}. \end{aligned}$$

Итак, окончательно имеем:

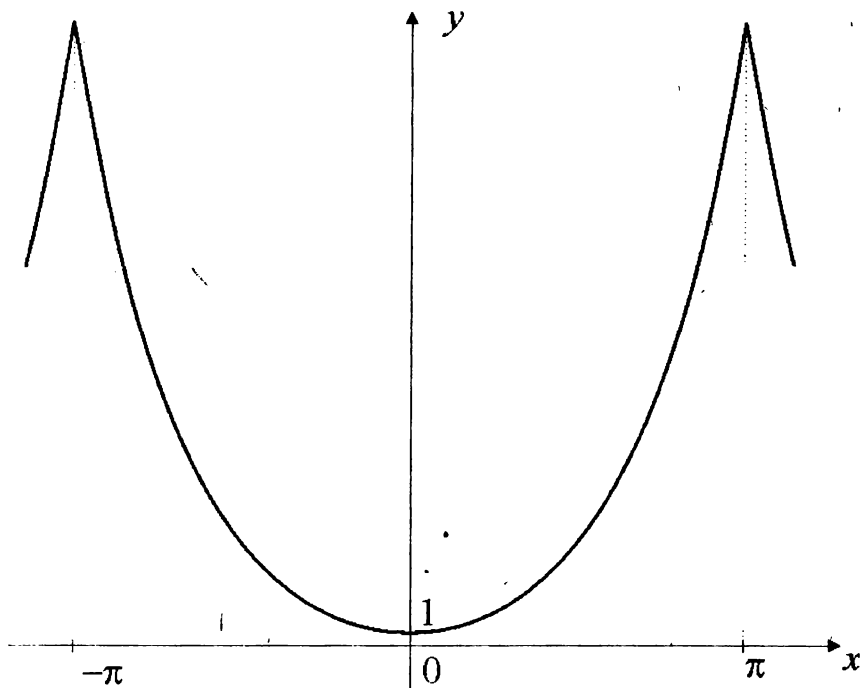
$$\sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k \sqrt{2} - 6) \frac{4k+2}{(4k+1)(4k+3)} = -\frac{\pi}{2}.$$

**Пример 6.** Разложить функцию  $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  в ряд Фурье по косинусам на отрезке  $[0, \pi]$  и с помощью этого разложения

найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

*Решение.* Чтобы получить разложение по косинусам, продолжим  $f(x)$  на  $[-\pi, 0]$  четным образом, а затем периодически, с периодом  $2\pi$ , продолжим ее на всю ось. Мы получим функцию вида:



Продолженная функция – непрерывная и кусочно-дифференцируемая. Поэтому по признаку Дини-Липшица ее ряд Фурье сходится всюду на  $[0, \pi]$  к  $f(x)$ .

Вычисляя коэффициенты Фурье, найдем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} [\operatorname{sh} x \cos nx]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} (-1)^n \operatorname{sh} \pi + \frac{2n}{\pi} [\operatorname{ch} x \sin nx]_0^{\pi} - \frac{2n^2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch} x \cos nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} (-1)^n \operatorname{sh} \pi - n^2 a_n, \end{aligned}$$

откуда

$$a_n = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}.$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид:

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} + \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Полагая  $x = \pi$ , мы получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} = \left( \operatorname{ch} \pi - \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \right) \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cth} \pi - \frac{1}{2}.$$

**Пример 7.** Написать равенство Парсеваля для функции  $f(x) = |x| \cos x$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$  и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1)^2}{(4n^2 - 1)^4}.$$

Решение. Функция  $f(x)$  интегрируема с квадратом на  $[-\pi, \pi]$ ,  
причем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin 2x dx = \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4\pi} x \cos 2x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Поэтому согласно теореме Ляпунова для  $f(x)$  имеет место формула Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}.$$

Вычислим коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ . Очевидно,  $f(x)$  – четная функция. Следовательно,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{4}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\cos(n+1)x + \cos(n-1)x] dx = \\ &= -\frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^{\pi} \sin(n+1)x dx - \frac{1}{\pi(n-1)} \int_0^{\pi} \sin(n-1)x dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi(n+1)^2} \cos(n+1)x \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi(n-1)^2} \cos(n-1)x \Big|_0^\pi = \\
&= \frac{1}{\pi(n+1)^2} \left( (-1)^{n+1} - 1 \right) + \frac{1}{\pi(n-1)^2} \left( (-1)^{n+1} - 1 \right) = \\
&= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi} \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} \right) = \\
&= 2 \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi} \frac{n^2 + 1}{(n^2 - 1)^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi} \frac{4k^2 + 1}{(4k^2 - 1)^2}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, равенство Парсеваля для  $f(x)$  имеет вид:

$$\frac{8}{\pi^2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1)^2}{(4n^2 - 1)^4} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}.$$

Отсюда получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1)^2}{(4n^2 - 1)^4} = \frac{\pi^4}{192} + \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}.$$

**Пример 8.** Написать равенство Парсеваля для функций

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \pi x, & 0 \leq x < \pi, \\ -x^2 - \pi x, & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

и, исходя из этого равенства, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}.$$

Решение. Функция  $f(x)$  интегрируема с квадратом на  $[-\pi, \pi]$ , причем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi x)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi^5}{5} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{3} \right) = \frac{\pi^4}{15}, \end{aligned}$$

так как, в силу того, что функция  $f(x)$  нечетная, функция  $f^2(x)$  четная. Поэтому согласно теореме Ляпунова для  $f(x)$  имеет место формула Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\pi^4}{15}.$$

Вычислим теперь коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ . Имеем:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi x) \sin nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx - 2 \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= -\frac{2}{\pi n} [x^2 \cos nx]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \cos nx dx + \frac{2}{n} [x \cos nx]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \\ &= -\frac{2\pi}{n} (-1)^n + \frac{2\pi}{n} (-1)^n + \frac{4}{\pi n^2} [x \sin nx]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \sin nx dx - \frac{2}{n^2} [\sin nx]_0^{\pi} = \\ &= \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{8}{\pi (2k+1)^3}, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, формула Парсеваля для  $f(x)$  имеет вид:

$$\frac{64}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^4}{15},$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

**Пример 9.** Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

и построить его график.

*Решение.* Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси.

Так как она четная, то ее интеграл Фурье равен:

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} a(\lambda) \cos \lambda x d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du = \frac{2}{\pi} \int_0^1 u \cos \lambda u du = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} \right)$$

и, следовательно,

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} \right) \cos \lambda x d\lambda.$$

Очевидно, функция  $f(x)$  имеет ограниченное изменение на каждом конечном отрезке. Поэтому согласно признаку Дирихле-Жордана ее интеграл Фурье сходится всюду к функции



$$g(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = \pm 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

график которой имеет вид:

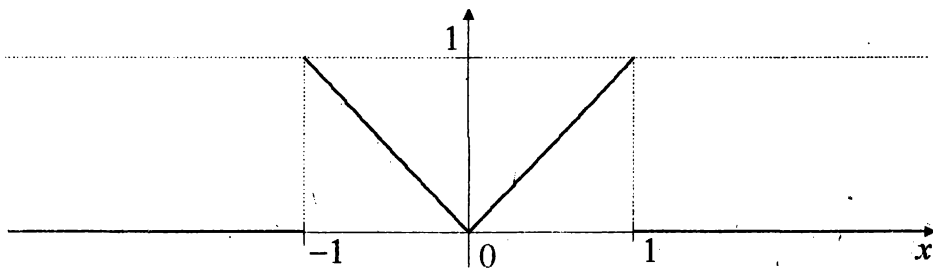


График функции  $f(x)$ .

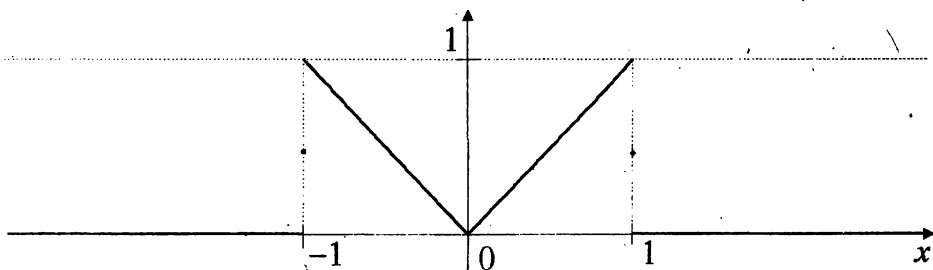


График функции  $g(x)$ .

**Пример 10.** Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} A \sin \omega x, & |x| \leq \frac{2\pi n}{\omega}, \\ 0, & |x| > \frac{2\pi n}{\omega}, \end{cases}$$

где  $n$  – натуральное число, и построить его график.

*Решение.* Очевидно,  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей оси. Она нечетная, следовательно, ее интеграл Фурье есть

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda,$$

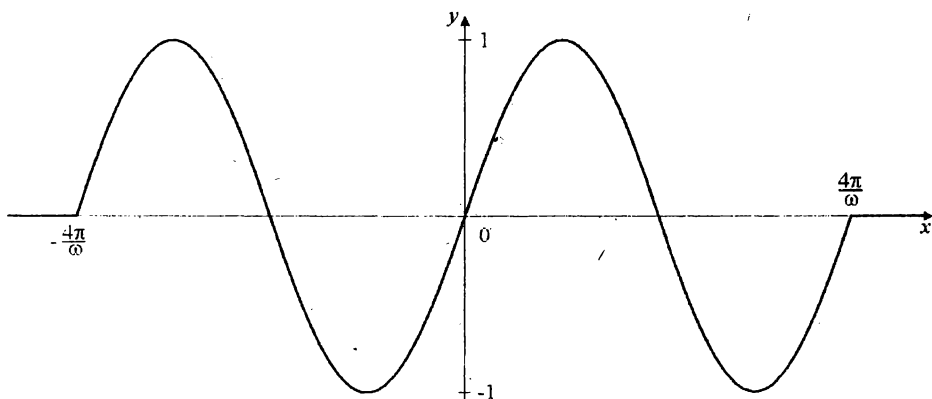
где

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \sin \lambda u du = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}} \sin \omega u \sin \lambda u du = \\ &= \frac{A}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}} (\cos(\omega - \lambda)u - \cos(\omega + \lambda)u) du = \\ &= \frac{A}{\pi} \left[ \frac{1}{\omega - \lambda} \sin(\omega - \lambda) \frac{2\pi n}{\omega} - \frac{1}{\omega + \lambda} \sin(\omega + \lambda) \frac{2\pi n}{\omega} \right] = \\ &= \frac{2A\omega}{\pi} \sin \frac{2\pi n \lambda}{\omega} \frac{1}{\lambda^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{2A\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi n \lambda}{\omega}}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda.$$

Так как функция  $f(x)$  непрерывна на всей прямой и кусочно-дифференцируема на ней, то при всех  $x \in (-\infty, \infty)$  интеграл Фурье функции  $f(x)$  сходится к ней самой.

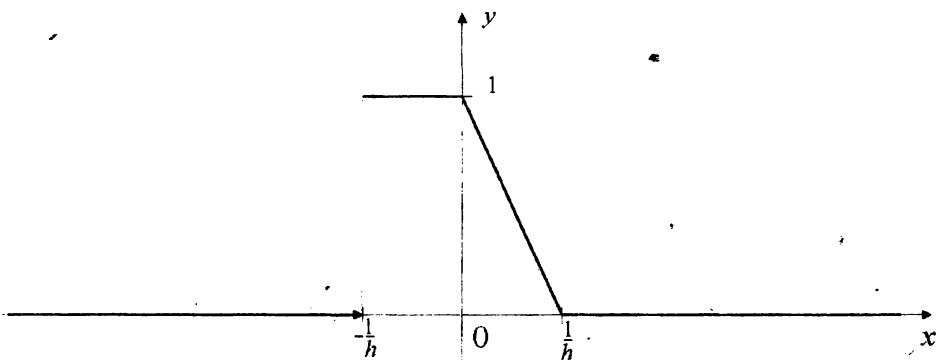


**Пример 11.** Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 - hx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{h}, \\ 1, & -\frac{1}{h} \leq x < 0, \\ 0, & |x| > \frac{1}{h}, \end{cases} \quad h > 0,$$

и построить его график.

*Решение.* График функции  $f(x)$  имеет вид



Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей прямой. Она не является ни четной, ни нечетной, поэтому ее интеграл Фурье будет иметь вид

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

где

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1/h}^0 \cos \lambda u du + \int_0^{1/h} (1-hu) \cos \lambda u du \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{h} + \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{h} - \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{h} + \frac{3}{\lambda} \int_0^{1/h} \sin \lambda u du \right] = \\ \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda^2} \cos \frac{\lambda}{h} + \frac{h}{\lambda^2} \right] &= \frac{h + \lambda \sin \frac{\lambda}{h} - h \cos \frac{\lambda}{h}}{\lambda^2 \pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1/h}^0 \sin \lambda u du + \int_0^{1/h} (1-hu) \sin \lambda u du \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \cos \frac{\lambda}{h} - \frac{1}{\lambda} \cos \frac{\lambda}{h} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \cos \frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda} \int_0^{1/h} \cos \lambda u du \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\lambda} \cos \frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda^2} \sin \frac{\lambda}{h} \right] = \frac{\lambda \cos \frac{\lambda}{h} - h \sin \frac{\lambda}{h}}{\lambda^2 \pi}. \end{aligned}$$

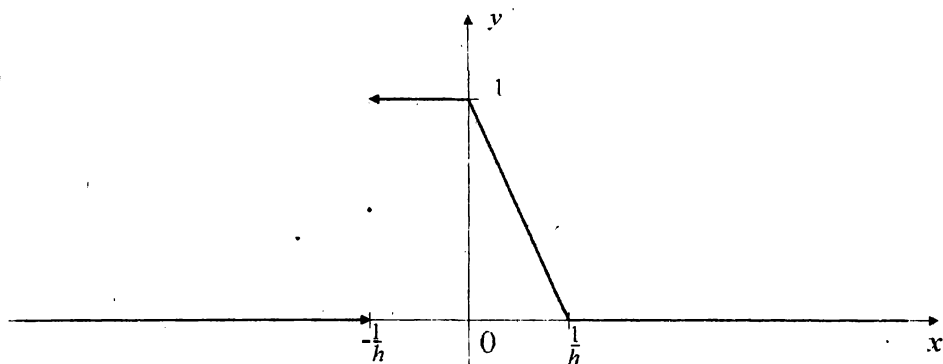
Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{h + \lambda \sin \frac{\lambda}{h} - h \cos \frac{\lambda}{h}}{\lambda^2} \cos \lambda x + \frac{\lambda \cos \frac{\lambda}{h} - h \sin \frac{\lambda}{h}}{\lambda^2} \sin \lambda x \right] d\lambda.$$

Так как функция  $f(x)$  кусочно-монотонна, то она имеет ограни-

ченное изменение на каждом конечном отрезке. В точке  $x = -\frac{1}{h}$  функция  $f(x)$  имеет разрыв первого рода, в остальных точках прямой она непрерывна. Поэтому согласно признаку Дирихле-Жордана интеграл Фурье  $f(x)$  сходится к сумме

$$g(x) = \begin{cases} 1 - hx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{h}, \\ 1, & -\frac{1}{h} < x < 0, \\ 0, & |x| > \frac{1}{h}, \\ \frac{1}{2}, & x = -\frac{1}{h}. \end{cases}$$



**Пример 12.** Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

**Решение.** Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей прямой, поэтому для нее имеет смысл формула преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda u} du = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 u e^{i\lambda u} du + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^2 e^{i\lambda u} du + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{-1} e^{i\lambda u} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{2i\lambda} - \frac{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}{2i^2\lambda^2} + \frac{e^{2i\lambda} - e^{i\lambda}}{2i\lambda} + \frac{e^{-i\lambda} - e^{-2i\lambda}}{2i\lambda} \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin 2\lambda - \sin \lambda}{\lambda} - i \frac{\lambda \cos \lambda - \sin \lambda}{\lambda^2} \right], & \lambda \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & \lambda = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Пример 13.** Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

**Решение.** Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на полупрямой  $[0, +\infty)$ , поэтому по определению косинус-преобразования Фурье имеем:

$$\begin{aligned} F_c(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos u \cos \lambda u du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} [\cos(\lambda+1)u + \cos(\lambda-1)u] du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin(\lambda+1)\pi}{\lambda+1} + \frac{\sin(\lambda-1)\pi}{\lambda-1} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda \sin \lambda \pi}{1-\lambda^2}. \end{aligned}$$

**Пример 14.** Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-|x|} \sin \omega x.$$

*Решение.* Так как функция  $e^{-|x|}$  убывает на бесконечности, а функция  $\sin \omega x$  ограничена, то функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей прямой. Поэтому для нее имеет смысл преобразование Фурье:

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda u} du.$$

А так как  $f(x)$  нечетная функция, то  $F(\lambda) = iF_s(\lambda)$ , и, следовательно,

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} \sin \omega u \sin \lambda u du = \\ &= i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} (\cos(\omega - \lambda)u - \cos(\omega + \lambda)u) du = i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (I_1 - I_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} e^{-u} \cos(\omega - \lambda)u du = \\ &= \frac{1}{\omega - \lambda} \left[ e^{-u} \sin(\omega - \lambda)u \right]_0^{\infty} + \frac{1}{\omega - \lambda} \int_0^{\infty} e^{-u} \sin(\omega - \lambda)u du = \\ &= -\frac{1}{(\omega - \lambda)^2} \left[ e^{-u} \cos(\omega - \lambda)u \right]_0^{\infty} - \frac{1}{(\omega - \lambda)^2} \int_0^{\infty} e^{-u} \cos(\omega - \lambda)u du = \\ &= \frac{1}{(\omega - \lambda)^2} - \frac{1}{(\omega - \lambda)^2} I_1, \end{aligned}$$

откуда

$$I_1 = \frac{1}{(\omega - \lambda)^2 + 1},$$

и аналогично

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-u} \cos(\omega + \lambda)u du = \frac{1}{(\omega + \lambda)^2 + 1}.$$

Отсюда

$$F(\lambda) = i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{(\omega - \lambda)^2 + 1} - \frac{1}{(\omega + \lambda)^2 + 1} \right).$$

**Пример 15.** Найти синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & 0 \leq x \leq a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

*Решение.* Очевидно, функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на полупрямой  $[0, +\infty)$ , поэтому по определению ее синус-преобразование Фурье есть

$$\begin{aligned} F_s(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin \lambda u du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a (a^2 - u^2) \sin \lambda u du = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \left[ -\frac{1}{\lambda} (a^2 - u^2) \cos \lambda u \right]_0^a - \frac{2}{\lambda} \int_0^a u \cos \lambda u du \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{a^2}{\lambda} - \left[ \frac{2}{\lambda^2} u \sin \lambda u \right]_0^a + \frac{2}{\lambda^2} \int_0^a \sin \lambda u du \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{a^2}{\lambda} - \frac{2a}{\lambda^2} \sin \lambda a - \frac{2}{\lambda^3} \cos \lambda a + \frac{2}{\lambda^3} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda^2 a^2 + 2 - 2a\lambda \sin \lambda a - 2 \cos \lambda a}{\lambda^3}. \end{aligned}$$

### **Ряды Фурье по классическим ортогональным полиномам**

Данной теме посвящена глава 3 тематического обзора. Поэтому перед решением следующих примеров следует прочесть материал этой главы.



**Пример 16.** Разложить функцию  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева на отрезке  $[-1, 1]$ .

*Решение.* Для каждой точки  $x \in (-1, 1)$  найдется такая окрестность  $(x - \delta, x + \delta)$ , в которой функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ . Действительно, по теореме о конечных приращениях

$$\left| \sqrt{1-t^2} - \sqrt{1-x^2} \right| \leq \frac{2(1-\delta_1)}{\sqrt{1-(1-\delta_1)^2}} |t-x|,$$

где  $(x - \delta, x + \delta) \subset (-1 + \delta_1, 1 - \delta_1)$ .

Кроме того,  $f(x)$  непрерывна на  $[-1, 1]$ . Следовательно, согласно общей теории,  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Чебышева, сходящийся к ней в интервале  $(-1, 1)$ . Введем вспомогательную функцию

$$F(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

и разложим ее в ряд Фурье по косинусам на  $[0, \pi]$ . Имеем

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = -\frac{2}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta] d\theta = \\ &= \frac{-1}{\pi(n+1)} (\cos \pi(n+1) - 1) + \frac{1}{\pi(n-1)} (\cos \pi(n-1) - 1) = \\ &= \frac{(-1)^n + 1}{\pi(n+1)} - \frac{(-1)^n + 1}{\pi(n-1)} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin \theta = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{4n^2 - 1}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

откуда, полагая  $\theta = \arccos x$ , найдем

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{2n}(x)}{4n^2 - 1}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(Сходимость на концах отрезка  $[-1, 1]$  имеет место в силу сходимости ряда Фурье для  $F(\theta) = \sin \theta$  и непрерывности замены  $x = \cos \theta$ ).

**Пример 17.** Разложить функцию  $f(x) = x^2$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева на отрезке  $[-1, 1]$ .

*Решение.* Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$  и удовлетворяет на нем условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ . Действительно,

$$|t^2 - x^2| = |(t-x)(t+x)| \leq 2|t-x|.$$

Поэтому она может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Чебышева, сходящийся к ней всюду на  $[-1, 1]$ . Введем вспомогательную функцию

$$F(\theta) = \cos^2 \theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

и разложим ее в ряд Фурье по косинусам на  $[0, \pi]$ . Из известной тригонометрической формулы следует, что

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta,$$

т.е.

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_n = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ \frac{1}{2}, & n = 2. \end{cases}$$

Отсюда, полагая  $\theta = \arccos x$ , найдем:

$$x^2 = \frac{1}{2}T_0(x) + \frac{1}{2}T_2(x).$$

**Пример 18.** Разложить функцию  $f(x) = \arccos x$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

*Решение.* Функция  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(-1, 1)$  и для каждой точки  $x \in (-1, 1)$  найдется такая окрестность  $(x - \delta, x + \delta)$ , в которой функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ . Поэтому она может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода, сходящийся к ней всюду в интервале  $(-1, 1)$ .

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(\theta) = \theta \sin \theta, \quad 0 < \theta < \pi,$$

и разложим ее в ряд Фурье по синусам на  $(0, \pi)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tau \sin \tau \sin n\tau \, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tau (\cos(n-1)\tau - \cos(n+1)\tau) \, d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n+1} \int_0^\pi \sin(n+1)\tau \, d\tau - \frac{1}{n-1} \int_0^\pi \sin(n-1)\tau \, d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos \pi(n-1) - 1}{(n-1)^2} - \frac{\cos \pi(n+1) - 1}{(n+1)^2} \right] = \frac{4n((-1)^{n+1} - 1)}{\pi(n^2 - 1)^2} = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k - 1, \quad n \neq 1, \\ -\frac{16k}{\pi(4k^2 - 1)^2}, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

При  $n = 1$  найдем:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tau \sin^2 \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau (1 - \cos 2\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin 2\tau d\tau = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\Phi(\theta) = \frac{\pi}{2} \sin \theta - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2 - 1)^2} \sin 2k\theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Отсюда

$$f(\cos \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2 - 1)^2} \frac{\sin 2k\theta}{\sin \theta}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Возвращаясь к переменной  $x = \cos \theta$ , получим искомое разложение:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2 - 1)^2} U_{2k-1}(x), \quad -1 < x < 1.$$

**Пример 19.** Разложить функцию  $f(x) = x \arccos x$  в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода в интервале  $(-1, 1)$ .

*Решение.* Функция  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(-1, 1)$  и для каждой точки  $x \in (-1, 1)$  найдется такая окрестность  $(x - \delta, x + \delta)$ , в которой функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ . Действительно,

$$\begin{aligned} |t \arccos t - x \arccos x| &\leq \\ &\leq |t - x| \arccos t + |x| |\arccos t - \arccos x| \leq \\ &\leq |t - x| \arccos t + |x| M |t - x|, \end{aligned}$$

где  $M = \max_{(-1+\delta_1, 1-\delta_1)} (\arccos \xi)'$ , где  $(x - \delta, x + \delta) \subset (-1 + \delta_1, 1 - \delta_1)$ ,

откуда

$$|t \arccos t - x \arccos x| \leq (\pi + M)|t - x|.$$

Поэтому она может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Чебышева второго рода, сходящийся к ней всюду в интервале  $(-1, 1)$ .

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(\theta) = \theta \cos \theta \sin \theta = \frac{\theta}{2} \sin 2\theta, \quad 0 < \theta < \pi,$$

и разложим ее в ряд Фурье по синусам на  $(0, \pi)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tau \sin 2\tau \sin n\tau \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tau (\cos(n-2)\tau - \cos(n+2)\tau) \, d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n+2} \int_0^\pi \sin(n+2)\tau \, d\tau - \frac{1}{n-2} \int_0^\pi \sin(n-2)\tau \, d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\cos \pi(n-2) - 1}{(n-2)^2} - \frac{\cos \pi(n+2) - 1}{(n+2)^2} \right] = \frac{4n((-1)^n - 1)}{\pi(n^2 - 4)^2} = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad n \neq 2, \\ -\frac{8(2k+1)}{\pi((2k+1)^2 - 4)^2}, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

При  $n = 2$  найдем:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tau \sin^2 2\tau \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tau (1 - \cos 4\tau) \, d\tau = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \sin 4\tau \, d\tau = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\Phi(\theta) = \frac{\pi}{4} \sin 2\theta - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{((2k+1)^2 - 4)^2} \sin(2k+1)\theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Отсюда

$$f(\cos \theta) = \frac{\pi \sin 2\theta}{4 \sin \theta} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{((2k+1)^2 - 4)^2} \frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin \theta}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Возвращаясь к переменной  $x = \cos \theta$ , получим искомое разложение

$$f(x) = \frac{\pi}{4} U_1(x) - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{((2k+1)^2 - 4)^2} U_{2k}(x), \quad -1 < x < 1.$$

**Пример 20.** Разложить функцию  $f(x) = |x|$  в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ .

*Решение.* Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$  и в интервале  $(-1, 1)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ :

$$|t - x| = |t - x|, \quad t \in (x - \delta, x + \delta).$$

Следовательно,  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Лежандра, сходящийся к ней всюду в интервале  $(-1, 1)$ . Вычислим коэффициенты Фурье-Лежандра:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 |x| P_n(x) dx.$$

Так как функция  $f(x)$  четная, а четность полинома  $P_n(x)$  совпадает с четностью индекса  $n$ , то все коэффициенты с нечетными номерами будут равны нулю. Следовательно, нужно вычислить коэффициенты с четными номерами  $n = 2k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  Имеем:

$$a_0 = \int_0^1 x P_0(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = 5 \int_0^1 x P_2(x) dx = \frac{5}{2} \int_0^1 x (3x^2 - 1) dx = \frac{5}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{8},$$

при  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (4k+1) \int_0^1 x P_{2k}(x) dx = \int_0^1 x (P'_{2k+1}(x) - P'_{2k-1}(x)) dx = \\ &= \left[ x (P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x)) \right]_0^1 - \int_0^1 (P_{2k+1}(x) - P_{2k-1}(x)) dx = \\ &= - \int_0^1 \left[ \frac{1}{4k+3} (P'_{2k+2}(x) - P'_{2k}(x)) - \frac{1}{4k-1} (P'_{2k}(x) - P'_{2k-2}(x)) \right] dx = \\ &= - \frac{1}{4k+3} (P_{2k+2}(x) - P_{2k}(x)) \Big|_0^1 + \frac{1}{4k-1} (P_{2k}(x) - P_{2k-2}(x)) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{4k+3} \left[ (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} - (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4k-1} \left[ (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} - (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \right] = \\ &= \frac{(-1)^{k-1} (2k-1)!! (2k+1+2k+2)}{4k+3 (2k+2)!!} + \frac{(-1)^{k-1} (2k-3)!! (2k-1+2k)}{4k-1 (2k)!!} = \\ &= (-1)^{k-1} \left[ \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} + \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} \right] = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!! (4k+1)}{(2k+2)!!}. \end{aligned}$$

Здесь мы дважды воспользовались соотношением

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

и тем, что

$$P_n(1) = 1, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Таким образом, ряд Фурье по полиномам Лежандра функции  $f(x)$  имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}P_2(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!(4k+1)}{(2k+2)!!} P_{2k}(x).$$

**Пример 21.** Разложить функцию  $f(x) = x^3 + x^2$  в ряд Фурье по полиномам Лежандра в интервале  $(-1, 1)$ .

*Решение.* Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$  и в интервале  $(-1, 1)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} |t^3 + t^2 - x^3 - x^2| &= |(t-x)(t^2 + tx + x^2) + (t-x)(t+x)| = \\ &= |(t-x)(t^2 + tx + x^2 + t + x)| \leq 5|t-x|. \end{aligned}$$

Следовательно,  $f(x)$  может быть разложена в ряд Фурье по полиномам Лежандра, сходящийся к ней всюду в интервале  $(-1, 1)$ . Так как функция  $f(x)$  является полиномом степени 3, то ряд будет иметь конечное число членов. Исходя из явного вида полиномов  $P_0(x), \dots, P_3(x)$ , нетрудно видеть, что

$$x^3 + x^2 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{3}{2}P_1(x) + \frac{1}{2}.$$

### **Ряды Фурье по собственным функциям дифференциального оператора второго порядка**

Данной теме посвящена глава 4 Тематического обзора. Поэтому перед решением следующих примеров следует прочесть материал этой главы.

**Пример 22.** Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - 2x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, 2],$$

$$y'(0) + y(0) = 0,$$

$$y'(2) + y(2) = 0$$

в интервале  $(0, 2)$ .

*Решение.* Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, 2],$$

$$y'(0) + y(0) = 0,$$

$$y'(2) + y(2) = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$-k^2 = \lambda,$$

из которого найдем:

$$k = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Если  $\lambda < 0$ , то решением будет

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Подставив в краевые условия, получим:

$$C_1(\sqrt{-\lambda} + 1) - C_2(\sqrt{-\lambda} - 1) = 0,$$

откуда

$$\frac{C_1}{\sqrt{-\lambda} - 1} = \frac{C_2}{\sqrt{-\lambda} + 1},$$

и

$$C_1 e^{2\sqrt{-\lambda}}(\sqrt{-\lambda} + 1) - C_2 e^{-2\sqrt{-\lambda}}(\sqrt{-\lambda} - 1) = 0,$$

откуда

$$\frac{C_1}{\sqrt{-\lambda} - 1} = \frac{C_2}{\sqrt{-\lambda} + 1} e^{-4\sqrt{-\lambda}}.$$

Следовательно, получим соотношение

$$e^{-4\sqrt{-\lambda}} = 1,$$

которое не верно при  $\lambda < 0$ .

Если  $\lambda = 0$ , то

$$y(x) = C_1 + C_2 x,$$

откуда, подставив в краевые условия, найдем:

$$C_1 + C_2 = 0$$

и

$$3C_2 + C_1 = 0.$$

Откуда получим, что

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Так как функция  $y(x) \equiv 0$  не является решением задачи Штурма-Лиувилля, то  $\lambda = 0$  не есть собственное значение.

Таким образом,  $\lambda > 0$  и

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  находятся из условий:

$$C_1 + C_2 \sqrt{\lambda} = 0,$$

$$C_1 (\cos 2\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin 2\sqrt{\lambda}) + C_2 (\sqrt{\lambda} \cos 2\sqrt{\lambda} + \sin 2\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Полагая  $\mu = \sqrt{\lambda}$ , получим

$$(\mu^2 + 1) \sin 2\mu = 0,$$

так как  $C_2 \neq 0$ .

Последнее уравнение имеет бесконечно много положительных корней

$$\mu_n = \frac{\pi n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{2} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Положим  $C_2 = -1$ ,  $C_1 = \frac{\pi n}{2}$ . Тогда собственные функции задачи

Штурма-Лиувилля примут вид:

$$y(x, \lambda_n) = \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

Функция  $f(x)$ , очевидно, непрерывна и дважды кусочно-непрерывно дифференцируема на отрезке  $[0, 2]$ . Поэтому ее можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Вычислим коэффициенты разложения:

$$c_n = \frac{\int_0^2 f(x) \left( \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \sin \frac{\pi n x}{2} \right) dx}{\int_0^2 \left( \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \sin \frac{\pi n x}{2} \right)^2 dx}.$$

Найдем интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left( \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \sin \frac{\pi n x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \int_0^2 \left[ \left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi n x}{2} - 2 \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} \sin \frac{\pi n x}{2} + \sin^2 \frac{\pi n x}{2} \right] dx = \\ &= \int_0^2 \left[ \left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos \pi n x}{2} - \frac{\pi n}{2} \sin \pi n x + \frac{1 - \cos \pi n x}{2} \right] dx = \left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 + 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{\int_1^2 (2-2x) \left( \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \sin \frac{\pi n x}{2} \right) dx}{\left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 + 1} = \\
 &= \frac{-2 \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi n} \left( (-1)^n - \cos \frac{\pi n}{2} \right) - 2 \int_1^2 x \left( \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \sin \frac{\pi n x}{2} \right) dx}{\left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 + 1} = \\
 &= \frac{\frac{4}{\pi n} \left( (-1)^n - \cos \frac{\pi n}{2} \right) - \frac{4}{\pi n} \left( 2(-1)^n - \cos \frac{\pi n}{2} \right) + 2 \int_1^2 \left( \sin \frac{\pi n x}{2} + \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \right) dx}{\left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 + 1} = \\
 &= \frac{\frac{8}{\pi n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{8}{(\pi n)^2} \sin \frac{\pi n}{2}}{\left( \frac{\pi n}{2} \right)^2 + 1} = 16 \frac{2\pi n (-1)^{n+1} + \pi n \cos \frac{\pi n}{2} - 2 \sin \frac{\pi n}{2}}{(\pi^2 n^2 + 4) \pi^2 n^2}.
 \end{aligned}$$

Ряд Фурье функции  $f(x)$  по собственным функциям данной задачи Штурма-Лиувилля имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n (-1)^{n+1} + \pi n \cos \frac{\pi n}{2} - 2 \sin \frac{\pi n}{2}}{(\pi^2 n^2 + 4) n^2} \left( \frac{\pi n}{2} \cos \frac{\pi n x}{2} - \sin \frac{\pi n x}{2} \right).$$

Он сходится в каждой точке интервала  $(0, 2)$  к функции  $f(x)$ .

**Пример 23.** Разложить функцию  $f(x) = 1$  в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0, 1],$$

$$y'(0) + y(0) = 0,$$

$$y(1) = 0$$

в интервале  $(0,1)$ .

*Решение.* Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad x \in [0,1],$$

$$y'(0) + y(0) = 0,$$

$$y(1) = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$-k^2 = \lambda,$$

из которого найдем:

$$k = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Если  $\lambda < 0$ , то решением будет

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Подставив в краевые условия, получим:

$$C_1(\sqrt{-\lambda} + 1) - C_2(\sqrt{-\lambda} - 1) = 0,$$

откуда

$$\frac{C_1}{\sqrt{-\lambda} - 1} = \frac{C_2}{\sqrt{-\lambda} + 1},$$

и

$$C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0,$$

откуда

$$C_2 = -C_1 e^{2\sqrt{-\lambda}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sqrt{-\lambda} - 1}{\sqrt{-\lambda} + 1} = -e^{-2\sqrt{-\lambda}}. \quad (*)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\mu) = \frac{\mu-1}{\mu+1} + e^{-2\mu}$$

и найдем ее корни. Очевидно,  $\mu = 0$  является корнем этой функции. Покажем, что других корней у нее нет. Для этого найдем ее производную

$$\varphi'(\mu) = \frac{2}{(\mu+1)^2} - 2e^{-2\mu}$$

и покажем, что  $\varphi'(\mu) > 0$  при  $\mu > 0$ . Представим  $\varphi'(\mu)$  в виде

$$\varphi'(\mu) = \frac{2e^{-2\mu}}{(\mu+1)^2} \left( e^{2\mu} - (\mu+1)^2 \right) = \frac{2e^{-2\mu}}{(\mu+1)^2} \psi(\mu).$$

Так как  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi'(0) = [2e^{2\mu} - 2(\mu+1)]_{\mu=0} = 0$  и

$\psi''(0) = [4e^{2\mu} - 2]_{\mu=0} > 0$ , то  $\mu = 0$  является точкой строгого минимума функции  $\psi(\mu)$ . Следовательно,  $\psi(\mu) > 0$  при  $\mu > 0$ , а значит, и  $\varphi'(\mu) > 0$ .

Следовательно, функция  $\varphi(\mu)$  возрастает вместе с  $\mu$  и других корней, отличных от нуля, у нее нет.

Таким образом,  $\lambda = 0$  есть единственное решение уравнения (\*), что не соответствует нашему предположению  $\lambda < 0$ .

Пусть теперь  $\lambda = 0$ . Тогда

$$y(x) = C_1 + C_2 x.$$

Подставив в краевые условия, найдем:

$$C_2 + C_1 = 0,$$

$$C_1 + C_2 = 0.$$

Отсюда

$$C_1 = -C_2$$

и функция

$$y(x, \lambda_0) = 1 - x$$

является собственной функцией, соответствующей собственному значению  $\lambda_0 = 0$ .

Пусть далее  $\lambda > 0$ . Тогда

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

где

$$C_1 + C_2 \sqrt{\lambda} = 0,$$

$$C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0.$$

Имеем:

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}.$$

Уравнение

$$\operatorname{tg} \mu = \mu$$

имеет бесконечно много положительных корней. Эти корни являются абсциссами точек пересечения тангенсоиды  $\zeta = \operatorname{tg} \mu$  и прямой  $\zeta = \mu$  (в системе  $O\mu\zeta$ ). Пусть  $\mu = \mu_n$  —  $n$ -й положительный корень этого уравнения. Тогда  $\lambda_n = \mu_n^2$  —  $n$ -е собственное значение. Полагая  $C_1 = \sqrt{\lambda_n}$ ,  $C_2 = -1$ , найдем собственные функции:

$$y(x, \lambda_n) = \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x - \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Функция  $f(x)$ , очевидно, непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема на отрезке  $[0, 1]$ . Поэтому ее можно разложить в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Вычислим коэффициенты этого разложения:

$$c_0 = \frac{\int_0^1 (1-x) dx}{\int_0^1 (1-x)^2 dx} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - 1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$c_n = \frac{\int_0^1 (\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x - \sin \sqrt{\lambda_n} x) dx}{\int_0^1 (\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x - \sin \sqrt{\lambda_n} x)^2 dx} = \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (\cos \sqrt{\lambda_n} - 1)}{\frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n - 1}{4\sqrt{\lambda_n}} \sin 2\sqrt{\lambda_n} + \frac{1}{2} \cos 2\sqrt{\lambda_n}}.$$

Вспомнив, что  $\lambda_n$  удовлетворяет уравнению  $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n}$ , из последнего равенства найдем:

$$c_n = \frac{\frac{\sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} + \cos \sqrt{\lambda_n} - 1}{\sqrt{\lambda_n}}}{\frac{\lambda_n}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2\sqrt{\lambda_n} \sin 2\sqrt{\lambda_n} + \frac{1}{2} \cos 2\sqrt{\lambda_n}} = 2 \frac{(\lambda_n + 1) \cos \sqrt{\lambda_n} - 1}{\lambda_n^{3/2}}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции  $f(x)$  по собственным функциям данной задачи Штурма-Лиувилля имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{3}{2}(1-x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n + 1) \cos \sqrt{\lambda_n} - 1}{\lambda_n^{3/2}} (\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x - \sin \sqrt{\lambda_n} x),$$

где  $\lambda_n$  удовлетворяет уравнению  $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n}$ . Это ряд сходится к  $f(x)$  всюду в интервале  $(0,1)$ .



---

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998.  
Казахстанско-Российский университет  
Объем 24,8 п.л. Тираж 328.

---



# ГЛОССАРИЙ

| № п/п | Новые понятия                                                                 | Содержание                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | 2                                                                             | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 1     | Ряд Фурье периодической функции $f(x)$ по основной тригонометрической системе | <p>ряд вида <math>f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)</math>,</p> <p>где</p> $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$ <p>— коэффициенты Фурье периодической функции <math>f(x)</math></p> |
| 2     | Частная сумма порядка $n$ ряда Фурье периодической функции $f(x)$             | <p>выражение вида</p> $S_n(x) = S_n(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$ <p>где <math>a_k, b_k</math> — коэффициенты Фурье функции <math>f(x)</math></p>                                                                                                                                                                           |
| 3     | Интеграл Дирихле                                                              | <p>интеграл</p> $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt,$ <p>представляющий частную сумму <math>S_n(x)</math> ряда Фурье функции <math>f(x)</math></p>                                                                                                                                                                                                               |

|   |                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | Ядро Дирихле порядка $n$                                                    | <p>функция</p> $D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) = \begin{cases} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}, & t \neq 2\pi m, \\ \frac{1}{\pi} \left( n + \frac{1}{2} \right), & t = 2\pi m, \end{cases}$ <p><math>n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots</math></p>                                                                           |
| 5 | Признак Дини-Липшица сходимости ряда Фурье                                  | <p>если <math>2\pi</math>-периодическая функция <math>f(x)</math> кусочно-дифференцируема на отрезке <math>[-\pi, \pi]</math>, то ее ряд Фурье в точке <math>x_0</math> сходится к</p> <p>1) <math>f(x_0)</math>, если <math>x_0</math> - точка непрерывности <math>f(x)</math>,</p> <p>2) <math>\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}</math>, если <math>x_0</math> - точка разрыва первого рода для <math>f(x)</math></p> |
| 6 | Признак Дирихле сходимости ряда Фурье                                       | <p>если функция <math>f(x)</math> периода <math>2\pi</math> кусочно-монотонна на отрезке <math>[-\pi, \pi]</math> и имеет на нем не более чем конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится к сумме <math>f(x_0)</math> в каждой точке непрерывности и к сумме <math>\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}</math> в каждой точке разрыва</p>                                                                       |
| 7 | Среднее квадратичное отклонение функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ | <p>величина</p> $\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

| 1  | 2                                                                               | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 8  | <p>Экстремальное свойство частных сумм тригонометрического ряда Фурье</p>       | <p>утверждение о том, что из всех тригонометрических многочленов порядка <math>n</math> наименьшее среднее квадратичное отклонение от функции <math>f(x)</math> имеет <math>n</math>-я частная сумма ряда Фурье функции <math>f(x)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                 |
| 9  | <p>Неравенство Бесселя для тригонометрической системы</p>                       | <p>неравенство</p> $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$ <p>где <math>a_0, a_n, b_n (n=1, 2, \dots)</math> — коэффициенты Фурье функции <math>f(x)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                               |
| 10 | <p>Формула Парсеваля для тригонометрической системы (уравнение замкнутости)</p> | <p>равенство</p> $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 11 | <p>Способ средних арифметических суммирования ряда Фурье</p>                    | <p>рассматриваются средние арифметические частных сумм тригонометрического ряда Фурье функции <math>f(x)</math>:</p> $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}$ <p>(суммы Фейера) и доказывается утверждение о том, что для непрерывной на отрезке <math>[-\pi, \pi]</math> функции <math>f(x)</math>, удовлетворяющей условию <math>f(-\pi) = f(\pi)</math>, последовательность ее сумм Фейера равномерно сходится на этом отрезке к <math>f(x)</math></p> |

|    |                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 12 | Ядро Фейера порядка $n$                                                    | <p>среднее арифметическое первых <math>n+1</math> ядер Дирихле:</p> $\Phi_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_n(x)}{n+1} = \begin{cases} \frac{\sin^2\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\pi(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}, & t \neq 2\pi m, \\ \frac{n+1}{2\pi}, & t = 2\pi m, \end{cases}$ <p><math>n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots</math></p>                                                                                                                                                              |
| 13 | Интеграл Фейера                                                            | <p>представление суммы Фейера в виде</p> $\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t) dt$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 14 | Метод Пуассона-Абеля (способ степенных множителей) суммирования ряда Фурье | <p>рассматриваются средние Пуассона-Абеля</p> $f(x, r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$ <p>где <math>0 &lt; r &lt; 1</math>, <math>a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, \dots)</math> – коэффициенты Фурье функции <math>f(x)</math>, и доказывается утверждение о том, что для непрерывной <math>2\pi</math>-периодической функции <math>f(x)</math> средние <math>f(x, r)</math> стремятся равномерно относительно <math>x</math> к <math>f(x)</math> при <math>r \rightarrow 1</math></p> |
| 15 | Ядро Пуассона                                                              | <p>величина</p> $P_r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2},$ <p><math>0 &lt; r &lt; 1</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

| 1  | 2                                           | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 16 | Интеграл Пуассона                           | представление средних Пуассона-Абеля в виде<br>$f(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} dt \quad (0 < r < 1)$                                                                                                                         |
| 17 | Интеграл Фурье                              | интеграл вида<br>$f(x) \sim \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$<br>где<br>$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du$ |
| 18 | Преобразование Фурье функции $f(x)$         | функция<br>$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\lambda u} du$                                                                                                                                                                                        |
| 19 | Косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$ | функция<br>$F_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \cos \lambda u du$                                                                                                                                                                                               |
| 20 | Синус-преобразование Фурье функции $f(x)$   | функция<br>$F_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(u) \sin \lambda u du$                                                                                                                                                                                               |

|    |                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 21 | Весовая функция                             | неотрицательная функция $p(x)$ , заданная на конечном отрезке $[a, b]$ , непрерывная в интервале $(a, b)$ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, в окрестности которых она ограничена либо график ее имеет вертикальные асимптоты, и интегрируемая на $[a, b]$ (в собственном-или несобственном смысле) |
| 22 | Класс функций $\bar{R}_{p(x)}^2([a, b])$    | множество функций $f(x)$ , таких, что $p(x)f(x)$ и $p(x)f^2(x)$ интегрируемы (в собственном или несобственном смысле)                                                                                                                                                                                             |
| 23 | Неравенство Буняковского                    | неравенство для функций $f(x), g(x) \in \bar{R}_{p(x)}^2([a, b])$ :<br>$\left[ \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b p(x) f^2(x) dx \int_a^b p(x) g^2(x) dx$                                                                                                                                         |
| 24 | Неравенство Коши                            | неравенство для функций $f(x), g(x) \in \bar{R}_{p(x)}^2([a, b])$ :<br>$\sqrt{\int_a^b p(x) [f(x) + g(x)]^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx} + \sqrt{\int_a^b p(x) g^2(x) dx}$                                                                                                                             |
| 25 | Норма функции из $\bar{R}_{p(x)}^2([a, b])$ | величина<br>$\ f\  = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx}$                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 26 | Функции, ортогональные по весу $p(x)$       | функции $f(x), g(x) \in \bar{R}_{p(x)}^2([a, b])$ , для которых выполнено равенство<br>$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx = 0$                                                                                                                                                                                           |



|    |                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 2                                                                                             | 3                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 27 | Ортогональная система функций веса $p(x)$                                                     | система функций $\{\varphi_n(x)\}$ , определенных на отрезке $[a, b]$ и принадлежащих классу $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ , для которой выполнены равенства $\int_a^b p(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad (n, m = 0, 1, \dots; n \neq m)$ |
| 28 | Ортонормированная система функций                                                             | ортогональная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ веса $p(x)$ , для которой $\ \varphi_n\  = 1 \quad (n = 0, 1, \dots)$                                                                                                                            |
| 29 | Ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе функций веса $p(x)$                         | ряд вида $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$ где $c_n = \frac{\int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx}{\ \varphi_n\ ^2} \quad (n = 0, 1, \dots)$                                                                                         |
| 30 | Процесс ортогонализации Грима-Шмидта                                                          | - коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$                                                                                                                                                                                 |
| 31 | Среднее квадратичное уклонение функций $f(x)$ и $g(x)$ из класса $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ | процесс построения ортонормированной системы, исходя из данной линейно независимой системы<br>величина $\delta_n = \ f - g\ ^2 = \int_a^b p(x) [f(x) - g(x)]^2 dx$                                                                                |

|    |                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 32 | <p>Экстремальное свойство частных сумм ряда Фурье функции <math>f(x)</math> по ортогональной системе <math>\{\varphi_n(x)\}</math> веса <math>p(x)</math></p> | <p>утверждение о том, что из всех линейных комбинаций вида</p> $U_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x),$ <p>где <math>a_0, a_1, \dots, a_n</math> — некоторые постоянные, наименьшее среднее квадратичное отклонение от функции <math>f(x)</math> имеет частная сумма ряда Фурье функции <math>f(x)</math>:</p> $S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$ |
| 33 | <p>Неравенство Бесселя для ортогональной системы <math>\{\varphi_n(x)\}</math> веса <math>p(x)</math></p>                                                     | <p>неравенство</p> $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \ \varphi_n\ ^2 \leq \int_a^b p(x) f^2(x) dx,$ <p>где <math>c_n</math> (<math>n = 0, 1, \dots</math>) — коэффициенты Фурье функции <math>f(x)</math> по системе <math>\{\varphi_n(x)\}</math></p>                                                                                                          |
| 34 | <p>Равенство Парсеваля для ортогональной системы <math>\{\varphi_n(x)\}</math> веса <math>p(x)</math></p>                                                     | <p>равенство</p> $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \ \varphi_k\ ^2 = \int_a^b p(x) f^2(x) dx$                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 35 | <p>Замкнутая система функций</p>                                                                                                                              | <p>ортогональная система веса <math>p(x)</math> функций <math>\{\varphi_n(x)\}</math>, такая, что для любой функции <math>f(x)</math> из <math>\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])</math> справедливо равенство Парсеваля</p>                                                                                                                                     |

| 1  | 2                                                                                                                               | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 36 | Полная система функций                                                                                                          | система функций $\{\varphi_n(x)\}$ , такая, что в $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ не существует функции, не равной нулю тождественно и ортогональной ко всем функциям этой системы                                                                                                                                                                             |
| 37 | Сходимость в среднем ряда Фурье функции из $\tilde{R}_{p(x)}^2([a, b])$ по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$ веса $p(x)$ | равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b p(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right]^2 dx = 0$                                                                                                                                                                                                                                             |
| 38 | Система ортогональных полиномов                                                                                                 | система полиномов $\{P_n(x)\}$ , ортогональных по весу $p(x)$ на отрезке $[a, b]$                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 39 | Рекуррентное соотношение для ортогональных полиномов                                                                            | соотношение, связывающее три последовательных ортогональных полинома $\tilde{P}_{n+2}(x)$ , $\tilde{P}_{n+1}(x)$ , $\tilde{P}_n(x)$ со старшим коэффициентом, равным 1: $\tilde{P}_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2}) \tilde{P}_{n+1}(x) - \lambda_{n+1} \tilde{P}_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$ где $\alpha_{n+2}$ и $\lambda_{n+1}$ — некоторые постоянные |

|    |                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 40 | <p><b>Ряд Фурье функции <math>f(x)</math> по ортонормированной системе полиномов</b></p> | <p>ряд вида</p> $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$ <p>где <math>\{P_n(x)\}</math> – ортонормированная система полиномов веса <math>p(x)</math>, а</p> $c_n = \int_a^b p(t) f(t) P_n(t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ <p>– коэффициенты Фурье функции <math>f(x)</math>.</p>                                      |
| 41 | <p><b>Ядро Дирихле для ортонормированной системы полиномов</b></p>                       | <p>выражение</p> $K_n(t, x) = \sum_{k=0}^n P_k(t) P_k(x),$ <p>где <math>\{P_k(x)\}</math> – ортонормированная система полиномов веса <math>p(x)</math>, входящее в интегральное представление частной суммы ряда Фурье</p> $S_n(x) = \int_a^b p(t) f(t) K_n(t, x) dt$                                                      |
| 42 | <p><b>Формула Кристоффеля-Дарбу</b></p>                                                  | <p>представление ядра Дирихле для ортонормированной системы полиномов в виде</p> $K_n(t, x) = \sqrt{\lambda_{n+1}} \frac{P_{n+1}(t) P_n(x) - P_{n+1}(x) P_n(t)}{t - x},$ <p>где <math>\lambda_{n+1}</math> – коэффициент рекуррентного соотношения для системы ортогональных полиномов <math>\{\tilde{P}_n(x)\}</math></p> |

| 1  | 2                                                                                    | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 43 | Полиномы Чебышева<br>первого рода                                                    | <p>полиномы</p> $T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1] \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$ <p>ортгоналные на отрезке <math>[-1, 1]</math> по весу</p> $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                                                                                                                                                                                        |
| 44 | Полиномы Чебышева<br>второго рода                                                    | <p>полиномы</p> $U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1] \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$ <p>ортгоналные на отрезке <math>[-1, 1]</math> по весу</p> $p(x) = \sqrt{1-x^2}$                                                                                                                                                                         |
| 45 | Полиномы Лежандра                                                                    | <p>полиномы <math>\{X_n(x)\}</math>, образующие ортогональную систему веса</p> $p(x) = 1 \text{ на отрезке } [-1, 1]$ <p>краевая задача</p>                                                                                                                                                                                                                                     |
| 46 | Задача<br>Штурма-Лиувилля для<br>дифференциального<br>оператора второго по-<br>рядка | $-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (l(x) - \lambda \quad r(x)) y = 0,$ $\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$ <p>где <math>p(x)</math> и <math>r(x)</math> положительные, а <math>l(x)</math> действительная функции,<br/> <math>x \in (a, b), \quad -\infty &lt; a &lt; b &lt; \infty</math></p> |

|    |                                                                          |                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 47 | Формула Родрига для полиномов Лежандра                                   | представление                                                                                                 | $X_n(x) = K_n \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$ <p>где <math>K_n</math> определяет старший коэффициент полинома <math>X_n(x)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 48 | Собственное значение задачи Штурма-Лиувилля                              | значение параметра $\lambda = \lambda_0$ , при котором задача Штурма-Лиувилля имеет ненулевое решение         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 49 | Собственная функция задачи Штурма-Лиувилля                               | ненулевое решение $y(x, \lambda_0)$ задачи Штурма-Лиувилля, соответствующее собственному значению $\lambda_0$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 50 | Разложение функции $f(x)$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля | представление функции $f(x)$ в виде ряда                                                                      | $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y(x, \lambda_n),$ <p>где <math>y(x, \lambda_0), y(x, \lambda_1), \dots, y(x, \lambda_n), \dots</math> – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, соответствующие собственным значениям <math>\lambda_0 &lt; \lambda_1 &lt; \dots &lt; \lambda_n &lt; \dots</math>, а</p> $c_n = \int_a^b f(x) y(x, \lambda_n) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ <p>– коэффициенты Фурье по системе <math>\{y(x, \lambda_n)\}</math></p> |